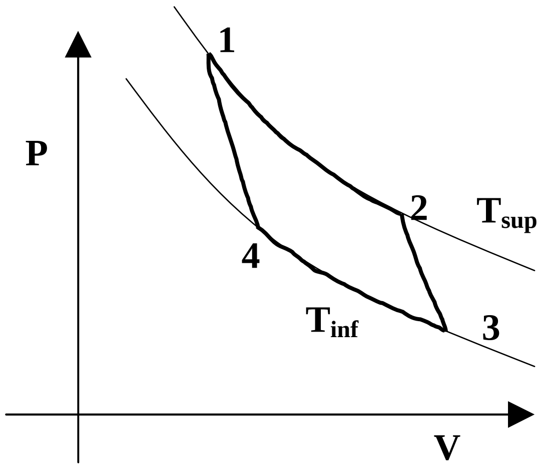
Liceo Scientifico Galileo Galilei

TERMODINAMICA

CICLO CARNOT

Prof. Mauro D'ETTORRE

CICLO TERMODINAMICO di CARNOT



Il ciclo è 1→2→3→4→1

n moli di gas perfetto
Gas con molecola con un numero quasiasi di atomi

$V_2 = \alpha V_1 \quad \alpha > 1$
$T_1 = T_2 = T_{sup}$
$T_3 = T_4 = T_{inf} = \beta T_{sup} \quad 0 < \beta < 1$

Calcolare il rendimento η della macchina termodinamica

Le equazioni utilizzate sono:

L'equazione dei gas perfetti $PV = nRT$ **Per le Trasformazioni adiabatiche** $\begin{cases} P_i V_i^k = P_f V_f^k \\ T_i V_i^{k-1} = T_f V_f^{k-1} \end{cases}$

VARIABILI DI STATO

Stato	P	V	T
①	P_1	V_1	$T_1 = T_{sup}$
②	P_2	$V_2 = \alpha V_1$ con $\alpha > 1$	$T_2 = T_1 = T_{sup}$
③	P_3	V_3	$T_3 = T_{inf} = \beta \cdot T_{sup}$ con $\beta < 1$
④	P_4	V_4	$T_4 = T_3 = T_{inf} = \beta \cdot T_{sup}$

Ricordando che VALORI di Q ed L nelle trasformazioni termodinamiche sono:

Trasformazione	Lavoro	Q Energia Termica
Isobara $P = \text{costante}$	$L = P_i (V_f - V_i)$	$Q = nC_p (T_f - T_i) = \frac{k}{k-1} nR (T_f - T_i)$
Isocora $V = \text{costante}$	$L = 0$	$Q = \Delta U = nC_V (T_f - T_i) = \frac{1}{k-1} nR (T_f - T_i)$
Isoterma $T = \text{costante}$	$L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$	$Q = L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$
Adiabatica $PV^K = \text{cost.}$	$L = \frac{1}{k-1} nR (T_i - T_f)$	$Q = 0$

Con $k = \frac{c_p}{c_v}$ pertanto risulta $c_p = \frac{k}{k-1} R$ e $c_v = \frac{1}{k-1} R$

Dove

Gas	k
Monoatomico	5/3=1,67
Biatomico	7/5=1,40
poliatomico	4/3=1,33

Trasformazione	**Lavoro**	**Q Energia Termica**
Isoterma 1→2	$L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$	$Q = L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$
	$L_{1\to 2} = nRT_{\sup} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = nrT_{suo} \ln\left(\frac{\alpha V_1}{V_1}\right)$ Poichè $\alpha > 1$ $L_{1\to 2} = nRT_{\sup} \ln \alpha > 0$	$Q_{1\to 2} = nRT_{\sup} \ln \alpha > 0$
Adiabatica 2→3	$L = \frac{1}{k-1} nR(T_i - T_f)$	$Q_{2\to 3} = 0$
	$L_{2\to 3} = \frac{1}{k-1} nR(T_{\sup} - T_{\inf}) > 0$	
Isoterma 3→4	$L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$	$Q = L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$
	$L_{3\to 4} = nRT_{\inf} \ln \frac{V_4}{V_3}$ Poichè $V_4 < V_3 \to L_{3\to 4} < 0$	$Q_{3\to 4} = L_{3\to 4} < 0$
Adiabatica 4→1	$L = \frac{1}{k-1} nR(T_i - T_f)$	$Q_{4\to 1} = 0$
	$L_{1\to 4} = \frac{1}{k-1} nR(T_{\inf} - T_{\sup}) = -L_{2\to 3} < 0$	
$\sum$	Lavoro netto $L_{netto} = L_{1\to 2} + L_{3\to 4}$ $L_{netto} = nRT_{\sup} \ln \alpha + nRT_{\inf} \ln \frac{V_4}{V_3}$	Calore fornito $Q_{FORNITO} = Q_{1\to 2}$ $Q_{FORNITO} = nRT_{\sup} \ln \alpha$

Calcolo del Rendimento

$$\eta_{carnot} = \frac{\Delta L_{netto}}{\Delta Q_{fornito}} = \frac{nRT_{\sup} \ln \alpha + nrT_{\inf} \ln \frac{V}{V_3}}{nRT_{\sup} \ln \alpha} = 1 + \frac{T_{\inf}}{T_{\sup}} \cdot \frac{\ln \frac{V_4}{V_3}}{\ln \alpha}$$

Quindi per il calcolo del rendimento basta conoscere solamente il volume in ③ e ④

Stato	Trasformazione	**RICERCA CONDIZIONI DI STATO MAANCANTI**
③	Adiabatica $2 \to 3$	Si utilizza la $T_2 V_2^{k-1} = T_3 V_3^{k-1}$ da cui si ricava $$V_3 = V_2 \left(\frac{T_{\sup}}{T_{\inf}} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \alpha V_1 \left(\frac{T_{\sup}}{T_{\inf}} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$
④	Adiabatica $4 \to 1$	Si utilizza la $T_4 V_4^{k-1} = T_1 V_1^{k-1}$ da cui si ricava $$V_4 = V_1 \left(\frac{T_{\sup}}{T_{\inf}} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Si può calcolare il rapporto V_4/V_3

$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1 \left(\frac{T_{\sup}}{T_{\inf}} \right)^{\frac{1}{k-1}}}{\alpha V_1 \left(\frac{T_{\sup}}{T_{\inf}} \right)^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{1}{\alpha}$$

Sostituendo nell'espressione del rendimento infine

$$\eta_{carnot} = 1 + \frac{T_{\inf}}{T_{\sup}} \cdot \frac{\ln \frac{1}{\alpha}}{\ln \alpha} = 1 + \frac{T_{\inf}}{T_{\sup}} \cdot \frac{-\ln \alpha}{\ln \alpha} = 1 - \frac{T_{\inf}}{T_{\sup}}$$

In definitiva

$$\boxed{\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_{\inf}}{T_{\sup}}}$$

Indipendentemente dal numero di moli e dal numero di atomi che compongono la molecola del gas,

Qualsiasi altra macchina termica ideale che opera tra le stesse temperature massime e minime ma che opera secondo un ciclo non di Carnot avrà un rendimento minore.

$$\boxed{\eta_{ideale} < \eta_{carnot}}$$

E per qualsiasi macchina reale il rendimento sarà minore della corrispondente macchina ideale (cioè che opera con lo stesso ciclo)

$$\boxed{\eta_{reale} < \eta_{ideale}}$$