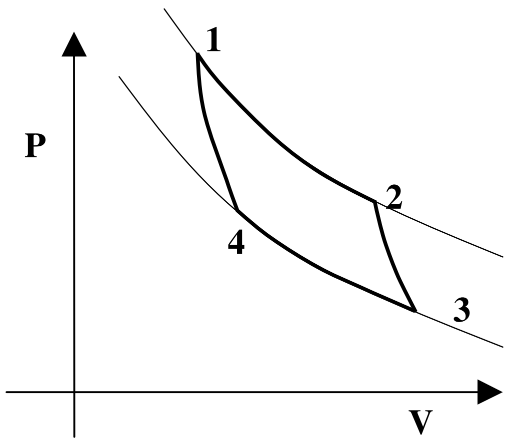
Liceo Scientifico Galileo Galilei

TERMODINAMICA

CICLO CARNOT

Prof. Mauro D'ETTORRE

CICLO TERMODINAMICO di CARNOT



Il ciclo è 1→2→3→4→1
1 mole di gas monoatomico.
I dati sono

P_1=100.000 Pascal
T_1=400 K
$V_2 = \alpha V_1$ (α=2)
T_3=200 K
n=1
k=5/3

1. Calcolare il lavoro netto fornito dalla macchina termodinamica.
2. Calcolare il rendimento η della macchina termodinamica

Le equazioni utilizzate sono:

L'equazione dei gas perfetti $PV = nRT$ **Per le Trasformazioni adiabatiche** $\begin{cases} P_i V_i^k = P_f V_f^k \\ T_i V_i^{k-1} = T_f V_f^{k-1} \end{cases}$

Stato	Trasformazione	RICERCA CONDIZIONI DI STATO
1	Eq. di stato	$V_1 = \dfrac{nRT_1}{P_1}$
2	Isoterma 1→2	Si ha $\begin{cases} P_1V_1 = nRT_1 \\ P_2V_2 = nRT_2 \end{cases}$ poichè $T_1 = T_2 \Rightarrow \dfrac{P_1V_1}{nR} = \dfrac{P_2V_2}{nR} \Rightarrow P_2 = P_1\dfrac{V_1}{V_2} = P_1\dfrac{V_1}{\alpha V_1}$ risulta $P_2 = \dfrac{1}{\alpha}P_1$
3	Adiabatica 2→3	Si utilizza per prima la $T_2V_2^{k-1} = T_3V_3^{k-1}$ da cui si ricava $V_3 = V_2\left(\dfrac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \alpha V_1\left(\dfrac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ Poi dalla $P_2V_2^k = P_3V_3^k$ si ricava $P_3 = P_2\left(\dfrac{V_2}{V_3}\right)^k = \dfrac{1}{\alpha}P_1\left(\dfrac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$
4	Isoterma 3→4 + Adiabatica 4→1	Per lo stato **4** V e P vengono calcolati utilizzando le equazioni della trasformazione adiabatica 4→1 $\begin{cases} T_4V_4^{k-1} = T_1V_1^{k-1} \\ P_4V_4^k = P_1V_1^k \end{cases}$ Dalla prima si ottiene $V_4 = V_1\left(\dfrac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{k-1}} = V_1\left(\dfrac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ Dalla seconda si ottiene

$$P_4 = P_1\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^k = P_1\left(\frac{V_1}{V_1\left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{k-1}}}\right)^k = P_1\left(\left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right)^k = P_1\left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = P_1\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Per VERIFICA si sfrutta l'equazione di stato per la trasformazione isoterma 3→4

$\begin{cases} P_4V_4 = nRT_4 \\ P_3V_3 = nRT_3 \end{cases}$ poichè è $T_3 = T_4$ deve risultare $P_4V_4 = P_3V_3$ (*)

$$\left[P_1\left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]\cdot\left[V_1\left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right] = \left[\frac{1}{\alpha}P_1\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}\right]\cdot\left[\alpha V_1\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right]$$

$$P_1V_1\left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{k-1}} = P_1V_1\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}V_1\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$P_1V_1\left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{-\frac{1}{k-1}} = P_1V_1\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}V_1\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{-\frac{1}{k-1}}$$

$P_1V_1\left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k-1}} = P_1V_1\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k-1}}$ infine $P_1V_1\left(\frac{T_4}{T_1}\right) = P_1V_1\left(\frac{T_3}{T_2}\right)$

Poiché $\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$ si ha che la (*) è verificata.

RIEPILOGO CONDIZIONI DI STATO

Stato	P	V	T
1	**P$_1$=100.000 Pa calcolo PVT**	$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = \frac{nR\times 400}{100.000} = \frac{nR}{250}$	**T$_1$=400 K**
		$V_1 = \frac{nR\times 400}{100.000} = \frac{nR}{250} \approx 0{,}033256\ \mathrm{m}^3$	
2	$P_2 = \frac{1}{\alpha}P_1$	$V_2 = \alpha V_1$	**T$_1$=400 K**
	50.000 Pa	$V_2 = \alpha\frac{nR\times 400}{100.000} = \frac{nR}{125} \approx 0{,}066512\ \mathrm{m}^3$	
3	$P_3 = \frac{1}{\alpha}P_1\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$	$V_3 = \alpha V_1\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}}$	**T$_2$=200 K**
	8.839 Pa	$V_3 = \alpha\frac{nR\times 400}{100.000}\left(\frac{400}{200}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 0{,}188124344\ \mathrm{m}^3$	
4	$P_4 = P_1\left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = P_1\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}$	$V_4 = V_1\left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{k-1}} = V_1\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}}$	**T$_2$=200 K**
	17.678	$V_4 = \frac{nR\times 400}{100.000}\left(\frac{400}{200}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 0{,}094062172\ \mathrm{m}^3$	

Trasformazione	**Lavoro**	**Q Energia Termica**
Isoterma 1→2	$L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$	$Q = L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$
	$L_{1\to 2} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_1 \ln \alpha$	$Q_{1\to 2} = nRT_1 \ln \alpha$
	2305,130264 J	**2305,130264 J**
Adiabatica 2→3	$L = \frac{1}{k-1}\left(P_i V_i - P_f V_f\right)$	$Q_{2\to 3} = 0$
	$L_{2\to 3} = \frac{1}{k-1}\left(P_2V_2 - P_3V_3\right) = \frac{1}{k-1}\left[\frac{1}{\alpha}P_1\alpha V_1 - \frac{1}{\alpha}P_1\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}\alpha V_1\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right] =$ $= \frac{1}{k-1}P_1V_1\left[1_1 - \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}}\right] = \frac{1}{k-1}P_1V_1\left[1 - \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{-\frac{1}{k-1}}\right] =$ $= \frac{1}{k-1}P_1V_1\left[1 - \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k-1}}\right] = \frac{1}{k-1}P_1V_1\left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right)$	
	2494,2 J	**0 J**
Isoterma 3→4	$L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$	$Q = L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$
	$L_{3\to 4} = nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} = nRT_3 \ln \left(\frac{V_1\left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{k-1}}}{\alpha V_1\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}}}\right)$ Poichè $\frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3}$ si ha infine: $L_{3\to 4} = nRT_3 \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -nRT_3 \ln \alpha$	$Q_{3\to 4} = -RT_3 \ln \alpha$
	-1152,565132 J	**-1152,565132 J**
Adiabatica 4→1	$L = \frac{1}{k-1}\left(P_i V_i - P_f V_f\right)$	$Q_{4\to 1} = 0$
	$L_{4\to 1} = \frac{1}{k-1}\left(P_4V_4 - P_1V_1\right) = \frac{1}{k-1}\left[P_1\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}V_1\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}} - P_1V_1\right] =$ $= \frac{1}{k-1}P_1V_1\left[\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}} - 1\right] = \frac{1}{k-1}P_1V_1\left[\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}}\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{-\frac{1}{k-1}} - 1\right] =$ $= \frac{1}{k-1}P_1V_1\left[\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k-1}} - 1\right] = \frac{1}{k-1}P_1V_1\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)$	
	-2494,2 J	**0 J**
Σ	$L = nR\left(T_1 - T_3\right)\ln \alpha$	$Q_{TOTALE} = nR\left(T_1 - T_3\right)\ln \alpha$
	1152,565132 J	**1152,565132 J**

	$Q_{FORNITO} = nRT_1 \ln\alpha$ **2305,130264 J**

Calcolo del Rendimento

$$\eta = \frac{\Delta L_{netto}}{\Delta Q_{fornito}} = \frac{nR(T_1 - T_3)\ln\alpha}{nRT_1 \ln\alpha} = \frac{(T_1 - T_3)}{T_1} = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{T_{minore}}{T_{maggiore}}$$ vale sempre per Carnot

In questo caso:

$\eta = 1 - \frac{T_{minore}}{T_{maggiore}} = 1 - \frac{200}{400} = 0{,}50 = 50{,}0\%$ ma anche $\eta = \frac{\Delta L_{netto}}{\Delta Q_{fornito}} = \frac{1152.6}{2305.13} = 0{,}50 = 50\%$

Formulario delle trasformazioni termodinamiche

Posto $k = \frac{c_p}{c_v}$ risulta $c_p = \frac{k}{k-1}R$ e $c_v = \frac{1}{k-1}R$

Energia interna totale $U = nc_vT = n\frac{1}{k-1}RT$ dove k assume i seguenti valori:

gas monoatomico: k=5/3=1,67 gas biatomico: k=7/5=1,40 gas poliatomico: k=4/3=1,33

R=Costante dei gas il cui valore è: $8{,}314\frac{Joule}{mole\,°K}$

VALORI di Q ed L nelle trasformazioni termodinamiche

Trasformazione	**Lavoro**	**Q Energia Termica**
Isobara $P = \text{costante}$	$L = P_i(V_f - V_i)$	$Q = nC_p(T_f - T_i) = \frac{k}{k-1}nR(T_f - T_i)$
Isocora $V = \text{costante}$	$L = 0$	$Q = \Delta U = nC_V(T_f - T_i) = \frac{1}{k-1}nR(T_f - T_i)$
Isoterma $T = \text{costante}$	$L = nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$	$Q = L = nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$
Adiabatica $PV^K = \text{cost.}$	$L = \frac{1}{k-1}(P_iV_i - P_fV_f) = \frac{P_iV_i}{k-1}\left[1 - \left(\frac{P_f}{P_i}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$	$Q = 0$