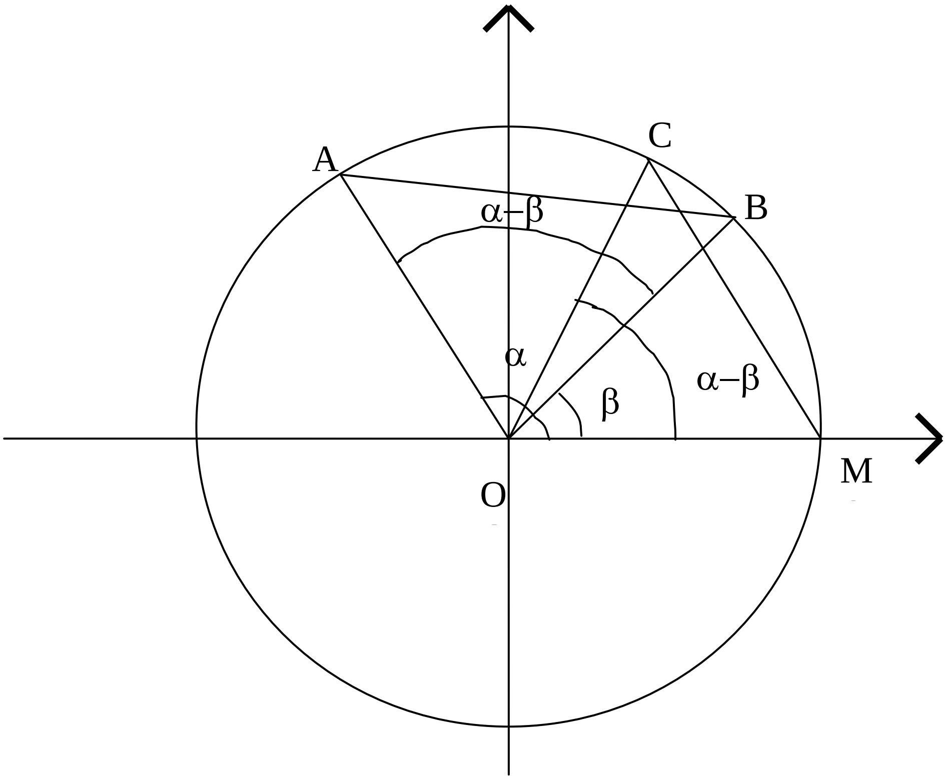
# FORMULE DI SOTTRAZIONE




I triangoli $A\hat{O}C \equiv C\hat{O}M$ sono congruenti per costruzione. In particolare AB=CM
Le coordinate dei punti A, B, C ed M

| | |
|---|---|
| A | $(\cos\alpha;\sin\alpha)$ |
| B | $(\cos\beta;\sin\beta)$ |
| C | $(\cos(\alpha-\beta);\sin(\alpha-\beta))$ |
| M | $(1;0)$ |

$$AB^2 = CM^2$$

$$[\cos\alpha - \cos\beta]^2 + [\sin\alpha - \sin\beta]^2 = [\cos(\alpha-\beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha-\beta)]^2$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta =$$
$$= \cos^2(\alpha-\beta) + 1 - 2\cos(\alpha-\beta) + \sin^2(\alpha-\beta)$$

Utilizzando la relazione fondamentale $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

Semplificando si ottiene

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Nella precedente si pone $\alpha = \frac{\pi}{2} + \gamma$

Si ha pertanto:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) - \beta\right]$$

Sviluppando con le formule di sottrazione

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) - \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\sin\beta$$

Ricordando le formule per gli angoli che differiscono per un angolo retto il primo membro diventa:

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) - \beta\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2} + (\gamma - \beta)\right] = -\sin(\gamma - \beta)$$

il secondo membro diventa:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\sin\beta = -\sin\gamma\cos\beta + \cos\gamma\sin\beta$$

Ovvero

$$-\sin(\gamma - \beta) = -\sin\gamma\cos\beta + \cos\gamma\sin\beta$$

Cambiando di segno e sostituendo $\gamma$ con $\alpha$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

La formula cercata

Se nella precedente si pone $\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma$ si ottiene dopo alcuni passaggi simili ai precedenti che utilizzano formule per gli angoli che differiscono per un angolo retto

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$