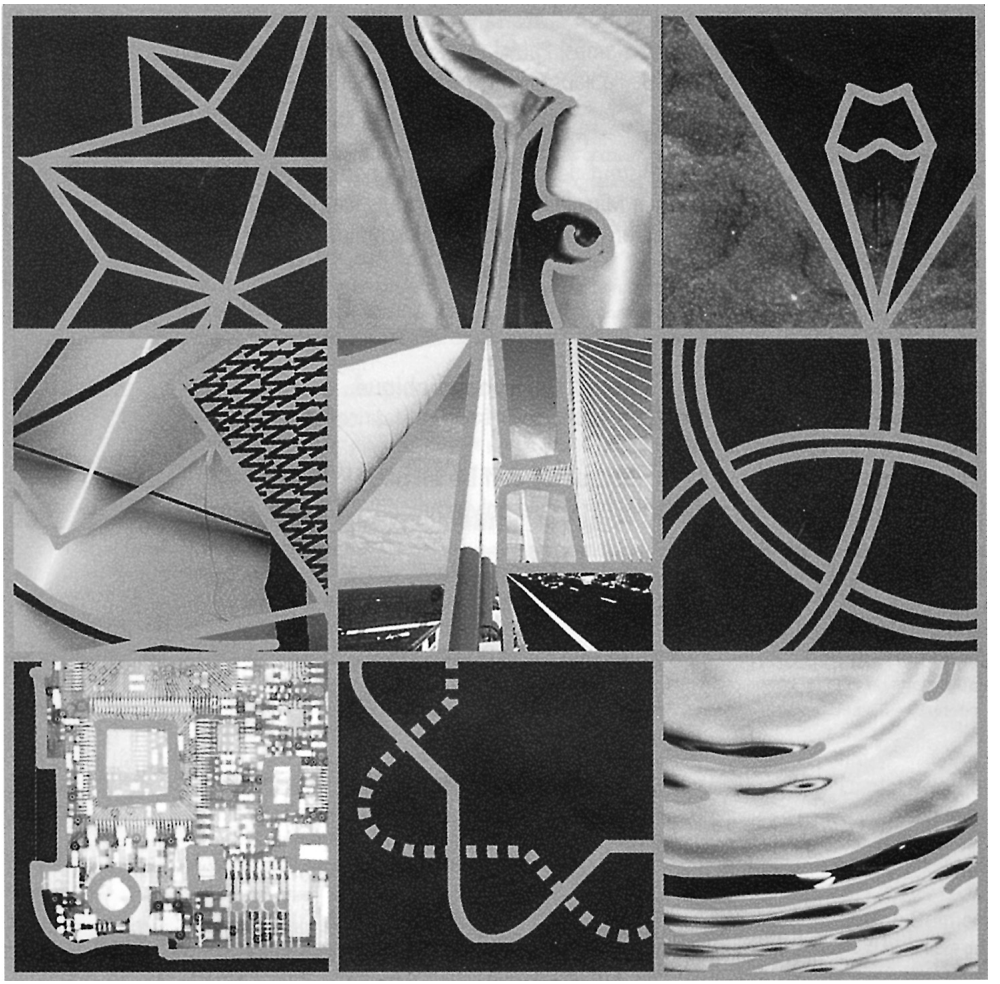
L'esplosione della matematica



Il progresso tecnologico si basa sulla creazione e sull'azione di macchine sempre più complesse le quali, grazie all'informatica, sono in grado di eseguire la maggior parte dei lavori di ordinaria amministrazione. È per questo che la parte di attività che rimane agli «umani» mette in risalto sia il pensiero razionale ad alti livelli, sia il rapportarsi con altre manifestazioni siano esse relative all'arte, alla poesia, allo sport. Come sarà suddiviso il lavoro nella società del futuro non è cosa prevedibile: quel che è certo è che la maggioranza dei posti di lavoro, nell'industria e nei servizi, richiederà sempre più una serie di riflessioni e di decisioni e sempre meno lavoro di routine. È certo dunque che la necessità di personale che abbia confidenza e conoscenza con la matematica sarà sempre più pressante.

La matematica di cui si parla è quella di adesso, in tutte le sue espressioni e, come già nel passato, è una mistura fertile di aspetti «puri» ed aspetti «applicati». E non c'è necessità di discutere se valga la pena di pensare più alla teoria o lavorare di più verso le applicazioni: sarebbe un modo di frenare la crescita globale della matematica! Per convincersene sarà sufficiente leggere i capitoli di questo volumetto che la Commissione Scientifica dell'UMI ha deciso di far tradurre dall'edizione originale curata dalla Société Mathématique de France e dalla Société de Mathematiques Appliquée et Industrielles: si parla di matematica e medicina, di matematica e telefonini, di matematica e genetica, di matematica e meteorologia, di matematica e.....

Giuseppe Anichini
(Segretario UMI)

Si ringraziano
la Société Mathématique de France e la Société de Mathematiques Appliquées et Industrielles (SMAI) per averci concesso i diritti di traduzione, di riproduzione e diffusione gratuita
e i dottori Carla Dionisi, Barbara Bianconi, Lucio Bedullo, Adriana Morini, Tommaso Valdesalici per l'opera di traduzione.

L'Unione Matematica Italiana

L'Unione Matematica Italiana (U.M.I.) nacque nel 1922.

Il 31 marzo di quell'anno Salvatore Pincherle, illustre matematico dell'Università di Bologna, inviò a tutti i matematici italiani una lettera in cui progettava l'istituzione di una società matematica nazionale.

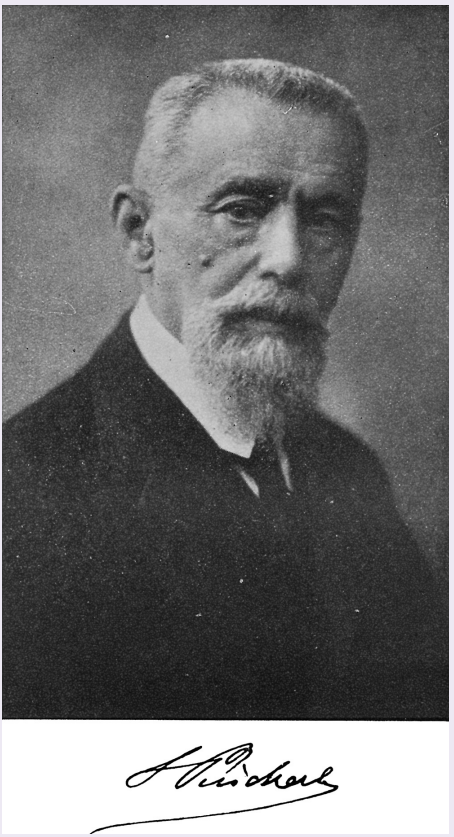
Nel giugno dello stesso anno fu pubblicato il primo fascicolo, ancorché in veste provvisoria, del futuro "Bollettino".

La creazione di una tale società fu ispirata da analoghe iniziative in altri paesi quali ad es. la Societé Mathématique de France (1872), la Deutsche Mathematik Vereinigung (1891), l'American Mathematical Society (1891) e, soprattutto, l'International Mathematical Union (1920).

I più importanti matematici dell'epoca – citiamo fra tutti Luigi Bianchi e Vito Volterra – incoraggiarono l'iniziativa di Pincherle anche inviando personalmente articoli per il futuro Bollettino.

Circa 180 matematici risposero alla lettera di Pincherle e, nel dicembre dello stesso anno, si tenne una prima riunione e furono varati i primi atti statutari. Da allora l'Unione Matematica è passata dai 400 membri nel 1940 agli attuali 2700. La sede sociale è rimasta a Bologna, presso l'attuale Dipartimento di Matematica.

Un primo, esaltante, risultato della nascita dell'Unione Matematica Italiana fu l'organizzazione del Congresso Internazionale di



Salvatore Pincherle (1853-1932); Fondò l'Unione Matematica Italiana nel 1922 e ne fu il primo Presidente fino al 1932.

Matematica a Bologna nel 1928: non solo per la perfetta organizzazione dell'incontro ma soprattutto per il fatto che Pincherle fu forte sostenitore della possibilità di mettere insieme, e di far confrontare sui temi della matematica, personalità che fino a pochi anni prima si erano combattute aspramente nell'ambito della prima guerra mondiale.

Tale progetto, anche se all'inizio fu politicamente osteggiato da molti paesi, ebbe un grande successo tant'è che anche la delegazione tedesca (formata da 76 matematici) era presente al convegno insieme ai 56 francesi, 52 statunitensi ed altri (per un totale di 840 partecipanti).

L'Unione Matematica Italiana ha lo scopo di seguire, promuovere e divulgare lo sviluppo delle Scienze Matematiche e delle loro applicazioni diffondendone i risultati e non ha fini di lucro. L 'U.M.I. è costituita in ente morale (R. Decreto 15 ottobre 1923, n. 2384).

Dallo Statuto:

per il conseguimento dei suoi fini l'Unione Matematica Italiana: stabilisce e mantiene fra i matematici, i fisici, gli ingegneri ed i cultori di scienze affini, e con Società Scientifiche italiane ed estere, relazioni atte a favorire la ricerca scientifica, ed a diffondere la conoscenza delle opere e degli studi di matematica pura ed applicata; facilita ai Soci la conoscenza delle opere degli scienziati e degli Istituti scientifici italiani e stranieri, dei più importanti risultati conseguiti, dei lavori eseguiti ed intrapresi, dei problemi scientifici e didattici che in Italia e fuori vengono posti, studiati e dibattuti; prepara riunioni e congressi nazionali; organizza la partecipazione di propri rappresentanti a congressi matematici stranieri; promuove e favorisce iniziative utili agli studi matematici, come pubblicazione di opere classiche, compilazioni di relazioni sullo stato attuale delle più importanti teorie, raccolte di notizie bibliografiche, costruzioni di tavole, di grafiche; istituisce e concede premi diretti al progresso delle Scienze Matematiche in Italia; pubblica un Bollettino e un Notiziario.

Nel passato 2004 l'UMI ha ottenuto significativi riconoscimenti a livello internazionale: è sufficiente ricordare che un nostro collega ha ricevuto a Pechino il premio "Gauss-Newton Medal" e che un nostro giovane ricercatore ha ricevuto uno dei Premi destinati dall'European Mathematical Society alle ricerche più brillanti.

Dopo un analogo incontro, che ha avuto un largo successo, scientifico e di partecipanti, nel 2002, con l'American Mathematical Society, l'UMI sta organizzando per il 2006, un joint meeting con la Société Mathématique de France. Il convegno è organizzato congiuntamente, oltre che dalla due società nazionali, anche dalla SIMAI (Società Italiana di Matematica Applicata ed Industriale) e dalla SMAI (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles); questo ad indicare la forte vocazione dell'Unione verso ogni forma di ricerca e promozione delle scienze matematiche ed il forte insediamento dell'UMI nell'ambito della comunità matematica internazionale.

Attualmente l'Unione è fortemente impegnata anche sul progetto di riforma universitaria concernente le "lauree magistrali per l'insegnamento", sulla discussione dei curricula delle scuole preuniversitarie nell'ambito del progetto di riforma della Scuola

L'Unione Matematica Italiana ha sede presso il Dipartimento di Matematica dell'Alma Mater Studiorium Università di Bologna.

secondaria: in quest'ultimo ambito la Commissione (dell'UMI) per l'Insegnamento della Matematica (C.I.I.M.) ha deciso di elaborare un curricolo per la scuola primaria e secondaria, definendo le conoscenze fondamentali in matematica, indipendentemente dalla varietà dei corsi di studio. È emersa in particolare l'idea della *matematica per il cittadino*, cioè di un corpus di conoscenze e competenze fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società, da acquisire secondo una scansione organica articolata nei successivi livelli scolastici. Il *corpus* fondamentale di tali elaborazioni è stato fatto proprio dai competenti organi ministeriali e figura attualmente nell'ambito delle "Indicazioni programmatiche" per la scuola primaria e per la scuola secondaria di primo grado.

Ed è seguendo questo spirito che la Commissione Scientifica dell'Unione, ovvero il suo massimo organo decisionale, ha deliberato di chiedere alla Società Matematica Francese la possibilità di tradurre, in lingua italiana, la presente pubblicazione nell'auspicio, fortemente condiviso dai Soci, di accrescere il momento della conoscenza e della divulgazione delle applicazioni della matematica.

(Giuseppe Anichini – Segretario UMI)

Indice

Il tempo che farà
Claude Basdevant 11
I segreti del telefono cellulare
Daniel Krob 16
Criptaggio e decriptaggio: comunicare in tutta sicurezza
Jean Luis Nicolas 20
Controllare un mondo complesso
Pierre Perrier 24
Il teorema del soffietto
Étienne Ghys 29
Trovare un gene responsabile del tumore
Bernard Prum 35
Compressione di immagini: l'uso delle *wavelets*
Stéphane Mallat 40
Impedire alle onde di fare rumore
Daniel Bouche 45
Quando arte fa rima con matematica
Francine Delmer 50
Dal DNA alla teoria dei nodi
Nguyen Cam Chi e Hoang Ngoc Minh 55
Il filosofo e il matematico
Pierre Cassou-Noguès 59
Come razionalizzare le vendite all'asta?
Jean-Jacques Laffont 65
L'econometria per vendere vini ed obbligazioni
Philippe Février e Michael Visser 70
Il rompicapo delle compagnie aeree
Jean Christophe Culioli 76
Geometria a 11 dimensioni per comprendere la Genesi?
Maurice Mashaal 81
INTERNET: modellizzare il traffico per gestirlo meglio
François Baccelli 87

Il prezzo delle opzioni finanziarie
Elyès Jouini 92
Comunicare senza errori: i codici correttori
Gille Lachaud 97
Ricostruire le superfici per l'iconografia
Jean-Daniel Boissonnat 101
I Matematici in Francia, in Italia e nel Mondo 105

Introduzione

Oggi viviamo una situazione per lo meno paradossale. La matematica è uno strumento insostituibile di formazione al rigore ed al ragionamento, sviluppa l'intuito, l'immaginazione, lo spirito critico; è anche una lingua internazionale, un caposaldo della cultura. Inoltre essa, per l'iterazione con le altre scienze, gioca un ruolo fondamentale nella concezione ed elaborazione degli oggetti della nostra vita quotidiana. Questo stato di fatto è in generale totalmente ignorato dalla maggior parte dei nostri concittadini, per cui la matematica ha perduto il suo significato. È un luogo comune, anche per persone che rivestono cariche di responsabilità, vantarsi di essere ignoranti in matematica o sottovalutarne la utilità.

Per questo paradosso e questa mancanza di comprensione si possono trovare delle spiegazioni dovute alle specificità della matematica. Essa è una disciplina che si nutre dei suoi legami con le altre scienze e con il mondo reale, ma che ugualmente si arricchisce da sola: le teorie non si demoliscono, si fondano le une sulle altre. Allo stesso tempo, anche se un buon numero di ricercatori matematici è interessato soprattutto al lato intellettuale ed estetico della disciplina, varie applicazioni nascono spesso in maniera inattesa. In tal modo le applicazioni arricchiscono la ricerca ma, da sole, non la possono guidare.

Questo sottile equilibrio fra i fattori di sviluppo interno ed esterno deve essere assolutamente preservato. Voler attribuire importanza ad una attività di ricerca matematica in base alle sue potenziali applicazioni arriverà a farla scomparire. (D'altro canto, privilegiare l'assiomatizzazione, lo studio delle strutture e la dinamica interna della disciplina, come ha fatto la scuola francese a partire dagli anni '40 per diversi decenni, ha condotto ad un ritardo dello sviluppo, in Francia, della matematica applicata, al contrario di quanto è avvenuto nel medesimo periodo negli Stati Uniti e in Unione Sovietica. I fattori di progresso sono spesso ai confini della disciplina.)

Oggi, e ce ne rallegriamo, la matematica ha ristabilito, e talvolta creato, dei forti legami con le altre scienze e con numerosi settori dell'economia. La frontiera fra matematica pura e matematica applicata è diventata vaga: i fondamenti della matematica servono a risolvere problemi sempre più difficili. Così, aree della matematica, come la geometria algebrica e la teoria dei numeri, hanno trovato delle applicazioni impensabili in teoria dei codici ed in crittografia. Analogamente, i legami fra la matematica e la

finanza si sono intensificati per valutare, e persino creare, dei prodotti finanziari sempre più complessi, in funzione dei bisogni e delle richieste degli operatori economici.

Tuttavia resta da fare un lavoro importantissimo di comunicazione e di sensibilizzazione per modificare un'immagine che non è sufficientemente sviluppata e per far scoprire tutte le attrattive ed i benefici del mondo della matematica e delle sue applicazioni. L'obbiettivo di questo scritto è di far conoscere la matematica sotto tutti i suoi più svariati aspetti scientifici, tecnologici, culturali, sociali; di sottolineare la diversità e l'universalità di una disciplina che mantiene legami abbastanza saldi sia con la fisica, la chimica, l'economia e la biologia che con la storia, la musica e la pittura. La matematica è ovunque. Senza di essa non esisterebbero i calcolatori, né i sistemi informatici, né i telefoni cellulari; non vi sarebbe alcun laboratorio per la costruzione di automobili e aerei, né alcun sistema di localizzazione satellitare, di trattamento dei segnali, di decifrazione del genoma, di previsioni meteorologiche, di crittografia, di carte con micro-chip, di robots.

Al di là del suo ruolo di scienza accademica e di formazione di base nella scuola, la matematica è onnipresente nella società di oggi. Essa segue, accompagna e, a volte, precede gli attuali sviluppi scientifici e tecnologici che fanno appello ai risultati della più recente ricerca contemporanea, così come traggono profitto dalle scoperte accumulate nel passato. Infine le richieste in matematica crescono con l'aumento dei cambiamenti e delle creazioni tecnologiche. Non si può non accorgersene di fronte alla necessità di elaborare, di dominare o di analizzare sistemi di complessità crescente.

Gli Stati Uniti lo hanno ben compreso, poiché la NFS (National Science Foundation, organismo federale incaricato di distribuire i fondi per la ricerca universitaria) ha deciso dall'anno 2000 di aumentare considerevolmente i sostegni finanziari alla Matematica. (Abbiamo la possibilità che la scuola matematica francese resti una tra le migliori del mondo e che la cultura matematica dei nostri scienziati e dei nostri ingegneri sia ad un buon livello su scala internazionale. Lo testimonia il numero di medaglie Fields, premio equivalente a quello Nobel (che non esiste per la matematica). Recentemente, nel corso del terzo Congresso europeo della matematica che si è svolto a Barcellona nel luglio del 2000, cinque tra i dieci premiati erano appartenenti alla scuola francese. Diamo a noi stessi la possibilità di mantenere il nuovo livello di eccellenza raggiunto.)

Mireille Martin-Deschamps
Presidente della SMF dal 1998 al 2001
Patrick Le Tallec
Presidente della SMAI dal 1999 al 2001

Il tempo che farà

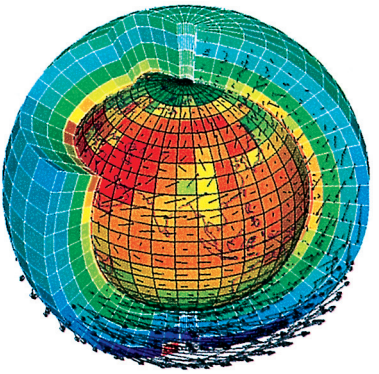
Claude Basdevant

La previsione meteorologica e climatica non è un problema di poco conto. Essa implica la modellizzazione di numerosi fenomeni di diversa natura e l'intervento di più scienze, dalla matematica alla biologia, passando per l'informatica, la fisica o la chimica.

Dietro l'affascinante presentatrice che tutte le sere in televisione ci descrive le previsioni meteorologiche per i giorni successivi, non ci sono più termometri e marchingegni, ma dei potenti calcolatori, che immagazzinano un gran numero di dati, ottenuti principalmente dai satelliti, e vi applicano molte leggi della meccanica e delle fisica, ma anche molte leggi matematiche, talvolta recentissime.

Affinché i calcolatori forniscano delle previsioni, è necessario elaborare preventivamente quello che viene chiamato modello numerico di previsione del tempo.

Schematicamente, un tale modello di previsione, per un periodo che va da otto a dieci giorni, rappresenta lo stato atmosferico attraverso dei parametri meteorologici (velocità del vento, temperatura, umidità, pressione, nuvole, etc...) calcolati al centro di "scatole" di circa cinquanta chilometri di lato con una altezza che varia da qualche dozzina a qualche centinaia di metri. Questa divisione immaginaria di tutta l'atmosfera in scatole è inevitabile, perché è impossibile rilevare i parametri meteorologici in tutti i punti (questi punti sono un numero infinito!). In linea di principio, più le scatole sono piccole – e dunque numerose –, più la descrizione dello stato atmosferico è precisa e più saranno maggiormente precise anche le previsioni. In pratica le scatole non misurano meno di cinquanta chilometri di lato; in tal modo la potenza dei calcolatori moderni non risentirà



Veduta d'artista delle scatole di calcolo di un modello di previsione del tempo o del clima (autore L. Fairhead LMD/CNRS).

troppo della pesantezza dei calcoli: è necessario che il calcolo sia eseguito in tempo utile, vale a dire in molto meno di 24 ore!

Partendo dallo stato dell'atmosfera, supposto conosciuto all'inizio del periodo da prevedere, il modello fa elaborare al calcolatore le evoluzioni future utilizzando le leggi della dinamica e della fisica. L'evoluzione temporale è calcolata passo dopo passo ad intervalli di qualche minuto. Questo si chiama principio della previsione numerica dei tempi ed è noto fin dal principio del XX secolo ma ha dovuto attendere gli anni '40 - '50 prima di essere effettivamente utilizzato, grazie all'avvento dei primi calcolatori.

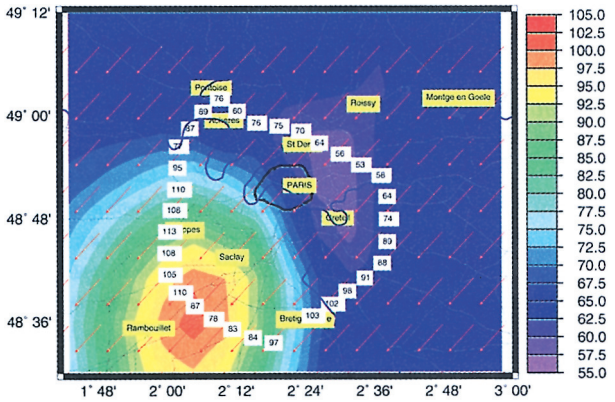
Le misure meteorologiche non sono direttamente utilizzabili

Il primo problema che compare nello schema ideale di previsione è quello di saper determinare lo "stato iniziale dell'atmosfera". Le osservazioni sono lontane dall'essere adatte a questo problema. Le stazioni meteorologiche sul suolo sono molto mal distribuite sul globo e forniscono pochissime misure in altitudine. Per quanto riguarda i satelliti, essi sono per la maggior parte uno in sequenza all'altro, quindi effettuano un continuo monitoraggio della terra. Le loro misure non sono perciò ottenute nello stesso istante ed in tutti i punti. Inoltre, i satelliti misurano delle quantità intere su tutta l'atmosfera (si tratta, in generale, di flussi di energia caratterizzati da una certa gamma di lunghezze d'onda) e non le grandezze meteorologiche (vento, temperatura, umidità, etc...) che entrano in gioco nelle equazioni dei modelli.

Si dispone dunque di una massa di dati disparati, mal distribuiti sulla superficie del globo, suddivisi in 24 ore, con i quali bisogna "inizializzare" una previsione, cioè bisogna costruire uno stato meteorologico iniziale partendo dal quale il modello simulerà l'evoluzione temporale. Grazie ai lavori della "ottimizzazione dinamica", settore a cui hanno molto contribuito il ricercatore russo Lev Pontryagin (1908 – 1988) e la scuola matematica francese, si sono potuti mettere a punto, negli anni '80, dei metodi detti d'"assimilazione variazionale" che permettono di ricostruire in maniera ottimale lo stato iniziale. L'idea che sta sotto questi metodi, operativi dall'anno 2000 a Meteo-France, è di trovare un modo per vincolare la traiettoria del modello numerico a passare "vicino" ai dati osservati durante le 24 ore precedenti. L'assimilazione variazionale non è del resto la sola tecnica matematica moderna che ha rivoluzionato le tecniche di elaborazione delle osservazioni: l'utilizzo di reti neuro-numeriche o di wavelets (*ondine* in italiano), inventate da meno di vent'anni, ha dato luogo a spettacolari progressi nell'efficacia, la precisione e la rapidità del trattamento dei dati forniti dai satelliti.

Quando l'analisi numerica entra in azione...

Una volta conosciuto lo stato atmosferico iniziale di cui ha bisogno il modello numerico di previsione, resta da



Pennacchio di ozono sulla regione di Parigi il 7 agosto 1998 alle 16,00 e a 300 metri di altitudine. Le concentrazioni simulate dal modello numerico CHIMERE del LMD/IPSL sono codificate a colori; nella cornice le misure aeree. (Figura di Merlin di Météo-France)

scrivere il programma informatico capace di valutare il tempo futuro a partire da quello iniziale, sfruttando le leggi della fisica. Quest'ultime si fondano su una descrizione continua dello spazio e del tempo, ma il nostro modello numerico, si basa su un numero, certamente grande, ma finito di scatole; così pure, gli intervalli di tempo fra due stati diversi sono separati da parecchi minuti. Questa sorta di passaggio dal problema fisico continuo al modello numerico si chiama "discretizzazione". Passare da equazioni continue a schemi numerici per il modello discretizzato, con la migliore precisione possibile, è parte dello studio dell'analisi numerica, un ramo della matematica che è esploso dopo l'avvento del calcolatore. L'analisi numerica ha come obiettivo la risoluzione delle equazioni portando i calcoli fino alla fine, cioè fino ad ottenere dei valori numerici precisi, nel minor tempo e con il minor sforzo possibile. Essa è indispensabile affinché la simulazione non sia solo apparente e per valutare il grado di incertezza delle previsioni. Per esempio, sono stati ottenuti di recente progressi importantissimi riguardanti i metodi che permettono di simulare il moto di sostanze chimiche o di particelle nella turbolenza atmosferica. Questi progressi hanno migliorato significativamente lo studio e la previsione dell'inquinamento dell'aria.

Si può prevedere il tempo con molto anticipo? La teoria dei modelli dinamici afferma che ciò non è possibile.

Fino ad ora abbiamo considerato previsioni del tempo a breve scadenza, fino a otto o dieci giorni; ma perchè non si fanno previsioni a più lunga scadenza?

Il meteorologo americano Edward N. Lorentz, in un celebre articolo del 1963, ha dimostrato che questo problema è senza speranza. L'atmosfera è un sistema caotico, vale a dire che ogni errore sullo stato meteorologico iniziale, pur piccolo che sia, si amplifica rapidamente nel corso del tempo, così rapidamente che una previsione per una dozzina di giorni perde ogni sua validità. Comunque ciò non vuol dire che non si possa prevedere il clima, ossia fare una previsione di tipo statistico piuttosto che deterministico, interessarsi cioè alla media delle temperature o delle precipitazioni in un certo periodo, piuttosto che al tempo preciso che farà in Bretagna tale giorno del mese di Luglio. La posta in gioco è alta: il nostro clima futuro è minacciato dalle emissioni di gas dovuti alle attività umane ed è necessario prevederne l'effetto a lungo termine. È la teoria dei *sistemi dinamici* che ci fornisce le motivazioni per giustificare questa modellizzazione del clima. Questa area, di cui il matematico Henri Poincaré, all'inizio del XX secolo, fu un grande precursore, ha conosciuto degli importantissimi progressi negli ultimi vent'anni. La teoria dei sistemi dinamici permette per esempio di scoprire delle strutture che vengono chiamate attrattori dai matematici e che descrivono l'andamento del tempo metereologico. Tale teoria permette anche di sapere quali siano le evoluzioni del tempo più probabili e quelle più instabili.

Nelle situazioni di instabilità, un buon strumento di indagine è la modellizzazione probabilistica del clima, un modello, cioè, nel quale si tiene conto esplicitamente del carattere aleatorio della previsione. Ancora poco sviluppate, le modellizzazioni di questo tipo devono appoggiarsi su progressi molto recenti della teoria delle equazioni alle derivate parziali stocastiche e della statistica.

Dalle previsioni meteorologiche alle previsioni climatiche

I modelli numerici di previsione del clima somigliano come fratelli ai modelli delle previsioni del tempo con due sole differenze sostanziali. Per ragioni di tempo e di calcolo, le loro "scatole" sono più grandi (da 200 a 300 chilometri di diametro) ed i tempi simulati vanno da qualche mese a centinaia e addirittura migliaia di anni; è impossibile essere più precisi. La differenza importante sta nel fatto che le variazioni climatiche hanno luogo su grande scala di tempi e che non si possono trascurare le iterazioni tra l'atmosfera, l'oceano, i ghiacci polari e perfino la biosfera. Ecco perché un modello di clima deve combinare un modello d'atmosfera, uno del comportamento dell'oceano e uno relativo alla biosfera. Al di là della complessità informatica di una tale costruzione, si pongono dei delicati problemi matematici sul modo migliore di abbinare queste aree e specificarne le relazioni attraverso condizioni sulle interfacce atmosfera-oceano, oceano-ghiacci, ecc. Affinché il calcolo nelle "grandi scatole" resti significativo, bisogna valutare l'effetto statistico, sulla scala di queste scatole, di

processi che si producono in dimensioni molto più piccole (per esempio, qual è l'effetto statistico, sul bilancio d'energia di una scatola di 300 chilometri di lato, di piccoli cumuli di qualche chilometro di diametro che vi si sviluppano?) Per tutti questi argomenti c'è ancora molto materiale matematico che deve essere ulteriormente sviluppato.

Claude Basdevant
Laboratorio di Meteorologia Dinamica
Scuola Normale Superiore di Parigi e Laboratorio di Analisi,
Geometria ed Applicazioni.
Università di Parigi-Nord.

Alcuni riferimenti bibliografici

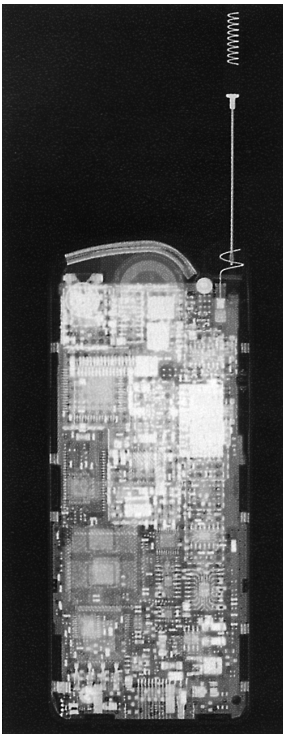
- *La Météorologie*, *n°* 30, numero speciale sulla previsione meteorologica numerica (2000).
- M. Rodias, et J.-P. Javelle, La Météorologie - *La prévision numérique du temps et du climat* (raccolta "Comprendre", SYROS, 1993).
- R. Temam et S. Wang, "*Mathematical Problems in Meteorology and Oceanography*" Bull. Amer. Meteor. Soc. 81, pp. 319-321 (2000).

I segreti del telefono cellulare

Daniel Krob

Il telefono cellulare è attualmente un oggetto abbastanza ordinario. Chi non ha mai visto un telefono cellulare o non ne ha mai usato uno? Tuttavia sono pochi quelli che hanno pensato alla scienza ed alla tecnologia che vi stanno sotto.

Il telefono cellulare è oggi usato correntemente in molti paesi. Tempo fa non era così, la situazione era ben diversa. Nel 1985, esisteva un gran numero di sistemi di telefonia senza fili, concepiti, sviluppati e commercializzati dai grandi operatori nazionali, ma erano incompatibili fra loro. Differenti per le loro caratteristiche tecniche, questi sistemi non permettevano di comunicare da una rete telefonica all'altra. Per renderli compatibili, occorreva dunque mettersi d'accordo su tutto un insieme di specifiche tecniche, stabilire cioè una norma comune. Questo è successo nel corso dei cinque anni successivi, quando è emersa in Europa la norma GSM (Global System for Mobile communication), a seguito di un'iniziativa di France Télécom e di Deutch Telekom, i due operatori telefonici francese e tedesco del periodo. I primi sistemi commerciali fondati su questa norma sono nati all'inizio degli anni '90. Tuttavia non è che verso la metà, in verità quasi alla fine, di quello stesso decennio, che il GSM si è veramente im-



Una radiografia di un cellulare. L'elettronica di questo apparecchio sembra complicata e non lascia comunque intravedere i lavori di natura matematica necessari per mettere a punto il cellulare. (Foto (negativo) Stock)

posto come il solo vero standard internazionale di telefonia mobile. Lo sviluppo attuale delle reti mobili di terza generazione è del resto una eccellente prova della importanza ottenuta dal GSM; la norma soggiacente questa terza generazione l'UMTS (Universal Mobile Telecommunications System), costituisce infatti una estensione naturale della norma GSM.

La norma GSM racchiude una grande complessità scientifica e tecnologica.

L'utente ha raramente coscienza del fatto che dietro le reti radio-mobili si cela una grande complessità scientifica e tecnologica. Per esempio, la norma GSM consta di più di 5000 pagine di specifiche tecniche, difficili da leggere anche per lo specialista! E il GSM è ben lontano dall'essere completato: enormi sforzi nella ricerca e nello sviluppo tecnologico sono stati avviati, sia dalle grandi società di ingegneria radio-telefonica che dai laboratori universitari, per migliorare senza sosta la qualità e l'efficacia delle reti di telefonia mobile.

La norma GSM si basa su un insieme di tecniche provenienti sia dalla telecomunicazione classica che dall'informatica, dalla matematica e dal trattamento del segnale. In particolare, la matematica e l'algoritmica giocano un ruolo fondamentale nella concezione e nel buon funzionamento dei meccanismi interni di reti

Un'antenna per la telefonia mobile GSM in campagna. Da una iconografia campestre. (Nefativo REA)

radio-mobili. La matematica fornisce il substrato teorico su cui si appoggiano quasi tutte le fasi fondamentali del trattamento dell'informazione che sono necessarie alla gestione di una comunicazione telefonica da un telefono cellulare. L'algoritmica invece permette di trasformare questi risultati fondamentali in protocolli effettivi ed efficaci, che possono cioè essere realizzati concretamente ed attivati in una rete radio-mobile.

Algoritmi per numerare l'informazione, dividerla in pacchetti, criptarla, ecc.

Per illustrare quale sia l'impatto di queste due discipline in telefonia mobile, guardiamo un po' più in dettaglio il modo in cui una comunicazione telefonica si sviluppa quando un utente compone un numero sul suo apparecchio. Innanzitutto tutti i dati trasmessi all'interno di una rete radio-mobile sono unicamente numerici: essi infatti sono costituiti da "pacchetti" o, meglio, stringhe di 0 e 1 di lunghezza fissata emesse ogni quarto di secondo che contengono l'insieme delle informazioni (parole, identificazione del cellulare, qualità di ricezione, ecc) legati alla determinata comunicazione telefonica. Oltre a permettere la mobilità degli utenti, la grande differenza tra la telefonia mobile e la telefonia fissa classica consiste nel fatto che le informazioni sono trasmesse da onde hertziane e non da cavi; questo ha reso necessaria la messa a punto di un insieme di tecniche algoritmiche e matematiche molto specifiche. Queste fanno intervenire l'algoritmica ripartita, l'ottimizzazione combinatoria, il trattamento numerico del segnale, la geometria algoritmica e la codifica della correzione degli errori, per citare solo qualche area, ma ve ne sono molte altre coinvolte.

I pacchetti di informazioni, in effetti, non sono trasmessi così come sono. Per assicurare la discrezione nelle comunicazioni, ogni pacchetto è criptato con l'aiuto di un protocollo crittografico specificato dalla norma e utilizzando delle chiavi segrete specifiche per ogni operatore (e va detto che i metodi crittografici si poggiano su tecniche e concetti algebrici e geometrici spesso molto elaborati). La gestione della trasmissione hertziana vera e propria necessita di un trattamento preliminare di ogni pacchetto di informazione. Il canale hertziano è di fatto sottoposto a vari tipi di perturbazioni che confondono i segnali emessi da un telefono cellulare. Per esempio l'assorbimento e la riflessione delle onde hertziane dagli edifici genera una attenuazione ed uno sfasamento di ogni segnale emesso da un telefono cellulare. Inoltre ogni segnale genera numerosi echi di cui bisogna tenere conto. Così, una parte di ogni pacchetto di informazione è specificatamente destinata al recupero del segnale originario all'interno del mare di echi in cui è sommersa.

Naturalmente questi problemi sono stati studiati già da molto tempo, sia a livello teorico che pratico. Tuttavia le richieste specifiche delle reti radio-mobili all'ingegneria industriale necessitano di un ulteriore sviluppo ed adattamento

delle tecniche e teorie matematiche classicamente utilizzate in questo contesto.

La teoria dei grafi per assegnare convenientemente le frequenze

L'apporto della algoritmica e della matematica non si limita al processo di elaborazione delle informazioni numeriche che stiamo (molto rapidamente) trattando. Le tecniche algoritmiche sono fondamentali per gestire efficientemente le frequenze radio di cui dispone ogni operatore. Gli enti pubblici affittano a ciascun operatore – a prezzo relativamente caro – la banda di frequenza che può utilizzare; tuttavia solo un piccolo numero di frequenze, dell'ordine di 300, è realmente utilizzabile all'interno di questa banda. Due comunicazioni svolte nello stesso momento da due diversi telefoni portatili, anche se geograficamente vicine, non possono essere inviate su frequenze attigue a causa delle interferenze che danneggiano la qualità della trasmissione. È quindi necessario saper ripartire in modo ottimale le frequenze disponibili per tutti gli utenti che sono ben più numerosi delle frequenze. Si può dimostrare che un essere umano non è in grado di risolvere questo tipo di problema in tempi ragionevoli. I metodi algoritmici, basati su dei modelli matematici proposti dalla teoria dei grafi, sono stati determinanti per poter realizzare delle logiche di pianificazione che permettano di risolvere efficientemente questi problemi di assegnazione di frequenze. Tutti questi problemi hanno grande importanza dal punto di vista industriale e sono ancora oggetto di ricerche molto attive.

Daniel Krob
Direttore di ricerca al CNRS e direttore del LIAFA (Laboratorio di Informatica Algoritmica: Fondamenti ed Applicazioni). Università Parigi 7 e CNRS.

Alcuni riferimenti bibliografici:

- D. Krob e E. A. Vassilieva, *Performance evaluation of demodulation methods: a combinatorial approach*, Proceedings of DM-CCG, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, pp. 203-214 (2001) (disponibile in rete: http://dmtcs.loria.fr))
- X. Lagrange, P. Godlewski, S. Tabbane, *Réseaux GSM-DCS* (Hermès, 1997).
- J. G. Proakis, *Digital Communications* (McGraw-Hill, III edizione, 1995).
- C. Servin, *Télécoms: de la trasmission à l'architecture de réseaux* (Masson, 1998).

Criptaggio e decriptaggio: comunicare in tutta sicurezza

Jean Luis Nicolas

Nel mondo attuale, dove le telecomunicazioni occupano un posto cruciale, la crittografia gioca un ruolo centrale. Essa è diventata una scienza così complessa che non può fare a meno della matematica di alto livello.

Nel marzo 2000 un grosso titolo era sulla prima pagina di tutti i giornali: "Attenzione alla sicurezza delle carte bancarie". Cosa era successo? In Francia, il codice segreto delle carte magnetiche era protetto dal 1985 grazie ad un metodo di criptaggio che usava un grande numero N costituito da 97 cifre. Questo numero N doveva essere il prodotto di due grandi numeri primi, vale a dire di

Pagare con la propria carta di credito, fare acquisti su Internet: i metodi della crittografia, che trattano matematica molto bella, sono indispensabili per la sicurezza di queste operazioni. (Foto Getty Images)

numeri che, come ad esempio il 7 o il 19, sono divisibili solo per 1 e per se stessi. Il codice segreto di una carta bancaria è costituito esattamente da questa coppia di numeri primi; il calcolo a partire da N era praticamente impossibile negli anni '80. Ma con l'aumento della potenza dei calcolatori ed il miglioramento dei metodi matematici, la grandezza dei numeri N, di cui non si possono calcolare i fattori primi in tempi ragionevoli, ha oltrepassato il centinaio di cifre negli ultimi anni del secolo scorso (nel gennaio del 2002 il record era di 158 cifre). Un astuto informatico, Serge Humpich, aveva così potuto trovare i due numeri primi ultra segreti il cui prodotto valeva N e li aveva utilizzati per fabbricare carte bancarie false.

Allora, per garantire la sicurezza dei nostri piccoli rettangoli di plastica, l'organismo di gestione delle carte bancarie ha subito costruito dei nuovi numeri N nettamente più grandi.

La crittografia moderna, incrocio fra matematica e informatica

Questa vicenda illustra l'importanza considerevole che riveste oggi la scienza del criptaggio, vale a dire della codifica dei messaggi con lo scopo di renderli illeggibili ad occhi indiscreti.

Criptare e decriptare dei messaggi segreti è un'attività vecchia di molti secoli, addirittura millenni. E questa attività è largamente fuoruscita dagli ambienti strettamente diplomatici o militari per investire lembi interi dell'universo delle comunicazioni civili: procedure d'autenticazione, transazioni bancarie, commercio elettronico, protezione di siti e schedari informatici, etc...

La crittografia ha conosciuto vari sviluppi nel corso degli ultimi decenni. Di conseguenza, essa è divenuta una scienza complessa, dove i progressi sono generalmente opera di specialisti con una formazione matematica ed informatica. Questa specializzazione si è manifestata a partire dalla seconda guerra mondiale. Oggi sappiamo che la decriptazione da parte degli alleati dei messaggi codificati dalla famosa macchina tedesca "Enigma" ha giocato un ruolo importante in questo conflitto. Un eminente matematico britannico, Alan Turing, uno dei padri della informatica teorica, ha apportato un contributo essenziale a questa decriptazione.

Negli anni '70 la crittografia ha conosciuto una piccola rivoluzione: l'invenzione della crittografia a "chiave pubblica" con il metodo RSA. Di che cosa si tratta? Fino ad allora i corrispondenti che volevano scambiarsi messaggi segreti condividevano una chiave segreta ed il rischio di intercettazione di questa chiave da parte del nemico era notevole. Il protocollo RSA, chiamato così in onore dei suoi inventori (Ronald Rivest, Ad Shamia e Leonard Adleman) ha risolto questo problema.

Questo metodo usa due chiavi: una chiave di criptaggio pubblico – cioè essa può essere conosciuta da tutti – e una chiave di decriptazione, che rimane segreta. Essa si basa sul principio (utilizzato in seguito per proteggere le carte bancarie, come abbiamo visto in precedenza) che è possibile costruire dei grandi numeri primi (di cento, mille cifre, ed oltre) ma che è

estremamente difficile ritrovare i fattori primi p e q di un grande numero N, che sia $N = p \times q$, conoscendo solo N. Schematicamente, la conoscenza di N rimanda a quella della chiave pubblica di criptaggio, mentre la conoscenza di p e q rimanda a quella della chiave segreta di decriptazione.

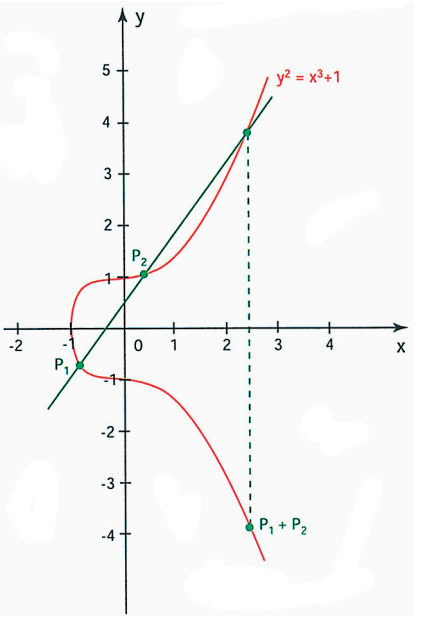
Evidentemente, se qualcuno trovasse un metodo per decomporre rapidamente nei loro fattori primi dei grandi numeri, il protocollo RSA diventerebbe inefficace. Ma potrebbe anche succedere che i matematici provino che tale metodo non esista, ciò rafforzerebbe la sicurezza del protocollo RSA. Questi sono degli argomenti di ricerca fondamentali.

I metodi che, come il protocollo RSA, fanno intervenire elaborate teoria dei numeri, portano un grande insegnamento: le ricerche matematiche (sui numeri primi specialmente) fatte disinteressatamente, possono rivelarsi, anni o decenni più tardi, cruciali per svariate applicazioni; questo in maniera imprevedibile. Nel suo libro "L'apologia di un matematico", il grande teorico dei numeri britannico G. H. Hardy (1877-1947), che era un fervente pacifista, si vantava di lavorare in un campo perfettamente puro, l'aritmetica, e di non aver mai fatto niente che poteva essere considerato "utile". I suoi lavori erano forse "inutilità" nella sua epoca. Oggi è falso.

Curve ellittiche: la geometria algebrica al servizio degli agenti segreti

E tutto ciò non riguarda soltanto la teoria dei numeri. Altri campi della matematica pura considerati privi di applicazione, contribuiscono alla sicurezza del criptaggio.

Metodi crittografici promettenti basati su principi vicini a quelli del protocollo RSA sono apparsi nel corso degli ultimi anni. È così per il metodo detto del "logaritmo discreto". Questo è servito a sua volta a concepire dei metodi che si basano sulle proprietà delle *curve ellittiche*. Non si tratta di curve aventi la forma di una ellisse, ma di curve il cui studio è



Il grafico della curva ellittica di equazione $y^2 = x^3 + 1$. Le curve ellettiche hanno una notevole proprietà: si possono "addizionare" i loro punti secondo il procedimento indicato sul disegno. La "somma" così definita rispetta le consuete leggi aritmetiche; ad es. $(P_1 + P_2) + P_3 = P_1 + (P_2 + P_3)$. Certi metodi attuali di crittografia necessitano delle curve ellittiche e delle loro proprietà algebriche.

iniziato nel secolo XIX per risolvere il difficile problema del calcolo del perimetro di una ellisse. Queste curve, per le quali le coordinate (x, y) dei loro punti verificano una equazione del tipo $y^2 = x^3 + a\,x + b$, hanno interessanti proprietà il cui studio fa parte della *geometria algebrica* - settore di grande interesse nella matematica attuale. Per esempio, con l'aiuto di una appropriata costruzione geometrica, è possibile definire una somma fra i punti di una curva ellittica. In generale, le curve ellittiche sono oggetti geometrici che possiedono delle proprietà aritmetiche – che sono sotto continua indagine – in grado di rendere un utile servizio alla crittografia. In tal modo è stato sviluppato un metodo crittografico detto *logaritmo discreto sulle curve ellittiche*.

Recentemente si è sviluppato un altro orientamento. Al congresso internazionale dei matematici a Berlino nel 1998, Peter Shor, dei laboratori della AT&T, ha ottenuto il premio *Nevanlinna* per i suoi lavori sulla *crittografia quantistica*. Che cosa significa questo termine? Da qualche anno alcuni fisici e matematici hanno immaginato che un giorno sarà possibile realizzare un calcolatore quantistico, vale a dire un calcolatore il cui funzionamento sfrutterebbe le leggi bizzarre della fisica quantistica, quelle che regnano nel mondo dell'infinitamente piccolo. Ci si è resi conto che un tale calcolatore, se fosse realizzabile, sarebbe capace di fattorizzare molto più velocemente grandi numeri e renderebbe quindi inefficace il metodo RSA. Alcuni ricercatori considerano concreta la realizzazione di un calcolatore quantistico, d'altronde ci sono state pubblicazioni molto recenti sulla rivista britannica *Nature* a favore di tale ipotesi (vedere riferimento bibliografico). D'altro canto, dei ricercatori hanno elaborato alcuni protocolli di crittografia quantistica, vale a dire dei metodi di criptaggio che utilizzano degli oggetti (fotoni, atomi, etc...) obbedienti alle leggi quantistiche. Questi protocolli quantistici potrebbero garantire una sicurezza infallibile. Tutto ciò è in fase di elaborazione e potrebbe diventare operativo tra qualche anno.

Jean Lous Nicolas
Istituto Gerard Desargues, Matematica, Università Claude-Bernard (Lione 1)

Alcuni riferimenti bibliografici:

- D. Kahn, *La guerre des codes secrets* (Interéditions, 1980).
- J. Stern, *La science du secret* (Odile Jacob, 1998).
- S. Singh, *Histoire des codes secrets* (J.-C. Lattès, 1999).
- J.-P. Delahaye, *Merveilleux nombres premiers* (Belin/Pour la Science, 2000).
- D. Stinson, *Cryptographie, théorie et pratique* (Vuibert, 2001).
- L. M. K. Vandersypen et al., "*Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance*", Nature, vol. 414, pp. 883-887 (20 décembre 2001).

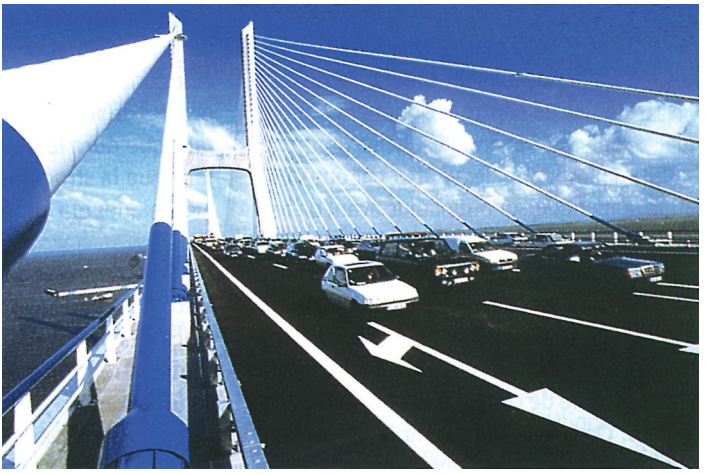
Controllare un mondo complesso

Pierre Perrier

Che si tratti della manovrabilità di un aereo, della tenuta meccanica di una struttura complessa o del problema del traffico automobilistico, il progresso in questi campi non proviene esclusivamente da invenzioni puramente tecniche. Nasce anche da ricerche astratte come la teoria matematica del controllo.

Si comprende facilmente l'interesse di saper controllare la reazione di un aereo o di un razzo alle turbolenze del deflusso d'aria, di determinare il protocollo da seguire in caso di incidente in una centrale nucleare, di gestire la rete di distribuzione di elettricità in caso di guasti, etc...

Normalmente la teoria del controllo si occupa di ottimizzare qualche cosa, di migliorare alcune prestazioni, di fare econo-



Il ponte Vasco de Gama sul Tago a Lisbona. La resistenza di una struttura complessa come quella di un ponte può essere efficacemente controllata inserendo, in posizioni ben individuate, dispositivi atti a modificarne, secondo i movimenti, le caratteristiche meccaniche, allo scopo di opporsi agli effetti della risonanza. La teoria matematica del controllo si occupa di tali situazioni. (Negativo Gamma/Gilles Basignac)

mia di materiali o di denaro: è il caso, per esempio, di quando si vuole mantenere un satellite sulla giusta orbita utilizzando la minima quantità di carburante.

Rivolgiamo l'attenzione all'esempio della gestione di guasti in una rete di distribuzione di energia elettrica. Un incidente come il corto circuito o una interruzione di contatti (dovuta per esempio alla caduta di un pilone dell'alta tensione), oppure un sovrappiù di consumo di energia in un dato luogo possono avere una gran quantità di conseguenze sulla rete elettrica.

In generale non è possibile realizzare uno studio esaustivo di tutti i possibili incidenti, né si può calcolare esattamente ad ogni istante l'effetto della propagazione di un certo incidente.

Il numero di possibilità da vagliare è gigantesco, troppo elevato persino per i più potenti calcolatori.

Nasce quindi l'esigenza di concepire un modello matematico che descriva in modo semplificato la rete ed il suo funzionamento. Mediante prove e calcoli di ampiezza ragionevole, una tale modellizzazione permetterebbe di emulare il comportamento del sistema con una certa approssimazione. Inoltre questo modello può aiutare a migliorare la realizzazione effettiva delle reti.

Si vorrebbe anche poter *calcolare* una situazione critica, provocata per esempio da un sovraccarico localizzato o ripartito su una intera regione. In altre parole si vorrebbe essere in grado di conoscere la successione delle azioni che il gestore dovrebbe effettuare al fine di minimizzare gli effetti del problema insorto. Tale conoscenza è possibile in teoria? Esistono delle strategie di controllo ottimali? Se si, quali sono? Di conseguenza, quali algoritmi sono necessari per la verifica attraverso una simulazione numerica (cioè con il calcolatore) prima di attuare la prova a grandezza reale? È importante fornire un quadro di studio rigoroso a questo problema di gestione delle risorse, se non si vuole disperdere l'energia, né essere vittime di interruzioni di corrente improvvise. Grazie a questo esempio si ha un primo tipo di problemi di controllo complesso dove i matematici – a forza di logica matematica, teoria dei numeri, teoria del calcolo delle probabilità, di analisi e teoria del controllo – apportano il loro contributo. Perlomeno essi possono fornire qualche certezza *a priori*, per quanto concerne l'esistenza di una soluzione accettabile ed i mezzi per ottenerla, soluzioni che la esperienza dovrà successivamente convalidare.

Impedire che i ponti crollino

La complessità non è necessariamente legata al concetto di rete. Essa può consistere nel modo in cui reagisce un oggetto ad una certa forza agente su di esso; un esempio è il caso di un ponte. La tenuta di tale struttura dipende da un gran numero di parametri tra i quali vi è la sua componente vibratoria. Come tutti sanno, le vibrazioni di un ponte possono essere provocate dal passaggio di autoveicoli così come dal vento forte di una tempesta. Talvolta questo fenomeno si

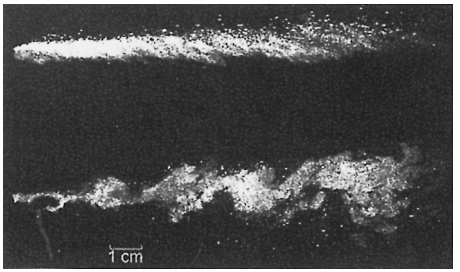
amplifica fino a provocare il cedimento della struttura. Un ponte, come tutte le altre strutture meccaniche, possiede una serie di frequenze di vibrazione caratteristiche; se la perturbazione esterna aggiunge energia con frequenze corrispondenti a quelle proprie delle vibrazioni caratteristiche, si produce il fenomeno della *risonanza* ed il ponte accumula energia nelle proprie oscillazioni. Queste oscillazioni si amplificano finchè dura la perturbazione esterna e fino a quando la struttura resiste alle contrazioni meccaniche che ne risultano.

Per controllare tali fenomeni bisogna comprenderli e saperli prevedere così da poter sistemare sul luogo opportuni dispositivi tecnici capaci di controllare le risonanze pericolose. Si parla di *controllo passivo* quando si calcola dove installare gli ammortizzatori che hanno il ruolo di assorbire energia prima che essa si accumuli pericolosamente nei punti critici; il controllo si dice invece *controllo attivo* quando, una volta sistemati i punti critici, si posizionano in luoghi opportunamente scelti dei dispositivi attivi, detti *attivatori*; questi ultimi agiscono in funzione dell'ampiezza delle disposizioni dei punti critici, in modo da evitare tutti i movimenti pericolosi per la tenuta della struttura. C'è una accurata analisi matematica del sistema dietro la scelta dei piazzamenti degli ammortizzatori e degli attivatori e la scelta delle procedure di controllo più adatte.

Purtroppo, il calcolo esatto del comportamento del sistema, in assenza di controllo, della sua sensibilità e della sua attitudine ad essere controllato è, spesso, inaccessibile. In generale la ragione è sia la complessità matematica dei problemi che sono non lineari (impossibilità di scomporli in somme di elementi più semplici e quasi indipendenti dal punto di vista matematico), sia il tempo di calcolo del calcolatore che sarebbe troppo lungo. Di conseguenza il controllo è spesso imperfetto. È possibile per esempio che si riesca a controllare provvisoriamente solamente alcuni tipi di vibrazione, infatti l'energia esterna si accumula in numerosi tipi di vibrazioni di ampiezza variabile, prima di combinarsi e riapparire in un numero minore di modi, ma con una forte ampiezza. Resta molto da fare per capire bene questi processi e rimediare ai loro effetti negativi.

Resistere nonostante le turbolenze

Prendiamo un terzo esempio: il moto di fluidi o gas ad alte velocità, come il moto dell'aria attorno ad un aereo o un razzo che decolla o dell'acqua intorno ad una imbarcazione a motore. In queste situazioni si è di fronte al fenomeno della *turbolenza*, vale a dire a dei movimenti complessi ed instabili di fluido, dati da una continua distruzione e ricostruzione di strutture così complicate che sembrano dipendere da un totale disordine. Le turbolenze possono disturbare considerevolmente il movimento di un veicolo, aereo o altro; si capisce che in questo caso sia molto più difficile mantenere il controllo della situazione. Questi problemi hanno anch'essi una grande importanza pratica. Anche gli ingegneri hanno pro-



L'immagine dall'alto mostra un deflusso supersonico relativamente regolare. Nell'immagine in basso l'azione di un piccolo getto di fluido, iniettato da un lato, ha avuto per esito la presenza di instabilità nel deflusso. Questa manipolazione illustra l'idea di come agire su un deflusso con l'aiuto di piccoli dispositivi, in genere a scopo di controllo. (Negativo di Erwan Collin - LEA/CEAT Università di Poitiers)

vato, per tentativi, così come si sono ispirati per esempio al volo degli uccelli per concepire aerei, ad architettare metodi per assicurare una certa controllabilità della turbolenza. Nel caso degli aerei, ci sono in parte riusciti rinforzando specialmente le vie di fuga e di attacco delle ali, mettendo degli ammortizzatori in prossimità di punti poco perturbati e degli azionatori - alettoni - nei punti più sensibili alla turbolenza. In un primo tempo la teoria matematica del controllo ha prodotto gli stessi risultati ottenuti in modo empirico. In seguito ha suggerito nuove strategie e progetti che rinforzano o diminuiscono, a seconda dei casi, la sensibilità alle azioni di un operatore umano o alle perturbazioni esterne. Ora si è in grado di identificare dei dispositivi elementari di controllo attivo che agiscono in scala quasi microscopica, quella di uno strato di fluido di qualche decimo di millimetro di spessore; per esempio delle piccole valvole o dei micromeccanismi permettono di deformare localmente il profilo di un veicolo nei punti critici del flusso del fluido. Coordinando l'azione dei numerosissimi micro-dispositivi di questo genere si ottiene, in scala macroscopica, un flusso avente le proprietà desiderate. Nel campo del controllo della turbolenza dei fluidi, alcune ricerche matematiche, legate a delle prove fisiche e tecniche, consentiranno di realizzare, tra qualche anno, prestazioni inimmaginabili dove, per ottenere uno stesso effetto, l'energia o la grandezza dei dispositivi necessari sarà diminuita di più di un ordine di grandezza.

La teoria del controllo mette in gioco diversi campi matematici, in particolare la teoria delle equazioni differenziali

I problemi di controllo che si sono qui esemplificati possono riguardare tanto dei banali tergicristalli di un'automobile così come il lanciatore spaziale più elaborato. La teoria del controllo, nata negli anni '40 – '50, in relazione specialmente alle attività aerospaziali, trae i suoi metodi ed i suoi concetti da varie branche della matematica. Essa concerne soprattutto le equazioni differenziali (equazioni dove l'incognita è una funzione) e le equazioni alle derivate parziali (equazioni differenziali dove la funzione incognita è una funzione di più variabili), una vasta area di studio abbastanza classica ma sempre molto attiva. In effetti, per la maggior parte dei sistemi

riscontrati nel mondo reale, si possono modellizzare i loro comportamenti con l'aiuto di equazioni di tal fatta.

Un problema di controllo si traduce quindi in una o più equazioni differenziali, o alle derivate parziali, che contengono dei termini rappresentanti delle azioni di controllo, definite dall'operatore umano, che chiamiamo globalmente c e la funzione incognita f che rappresenta il comportamento del sistema. La funzione f è la soluzione dell'equazione differenziale dove interviene c e quindi essa dipende da c. Lo scopo della teoria del controllo è, quindi, determinare a grandi linee, quale sia il c adeguato affinché f, cioè il comportamento del sistema, sia accettabile. Per un matematico non si tratta tanto di lavorare con questa o quella equazione particolare, ma piuttosto di ottenere dei risultati generali, valevoli per tante classi di equazioni e perciò applicabili a tante situazioni differenti.

In Francia, la teoria del controllo occupa buona parte del programma della prestigiosa scuola di matematica applicata fondata da Jacques-Louis Lions (1918 - 2001). Ma una buona scuola di matematica ovviamente non basta: è ugualmente necessario che i risultati teorici siano conosciuti ed applicati da tutti coloro che possano averne bisogno. Da ciò scaturisce l'interesse di stringere i legami tra la comunità matematica, i meccanici, gli ingegneri, i chimici o i biologi.

Pierre Perrier
Académie de sciences et Académie des Technologies, Paris.

Alcuni riferimenti bibliografici:

- J. R. Leigh, *Control theory. A guided tour* (Peter Peregrimus, Londres, 1992).
- J. Zabczyk, *Mathematical control theory: an introduction* (Birkhaüser, 1992).
- J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués* (Masson, 1988).

Il teorema del soffietto

Étienne Ghys

Una riga, una matita, del cartone, delle forbici e della colla: non c'è bisogno d'altro per procurare ai matematici divertimento e piacevoli problemi, il cui studio si rivela spesso, a posteriori, inaspettatamente utile in altre professioni.

Costruiamo una piramide di cartone... Per fare questo, si comincia a tagliare un modello SABCDE da un foglio di cartone come indicato in figura 1, poi si piega lungo le linee tratteggiate ed infine si incollano i lati AS ed ES.

Il risultato è una specie di cono il cui vertice è S ed il bordo è il quadrilatero ABCD. Questo oggetto è "flessibile", infatti il quadrilatero ABCD si può deformare aprendolo più o meno: la costruzione non è solidissima. Per completare la piramide bisogna tagliare ancora un rettangolo di cartone ed incollarlo sul quadrilatero menzionato in precedenza per formare la base. Dopo questa operazione la piramide risulta essere solida, rigida. Se si posa su un tavolo essa non crolla e se si cerca di deformarla con le mani (con non troppa forza) non vi si riesce a meno di deformare le facce di cartone. Analogamente, un cubo in cartone è *rigido* come tutti hanno spesso sperimentato. Che ne è di un poliedro generico che abbia ad esempio un migliaio di facce? Il geode della Villette a Parigi è rigida? Quest'ultima domanda lascia intravedere come il tema della rigidità e della flessibilità non sia solamente teorico.

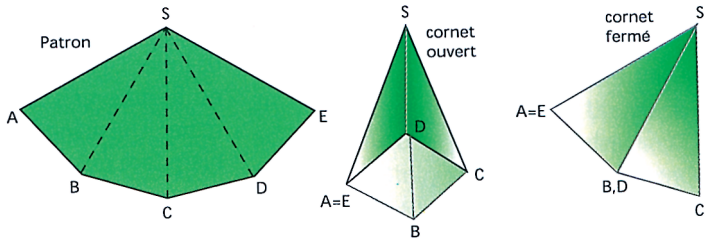


Figura 1. La costruzione di una piramide col cartoncino. Se non è presente la base ABCDA, l'oggetto ottenuto è flessibile.

Un problema ancora attuale che risale all'antichità

Il problema della rigidità di oggetti di questo tipo è antichissimo. Euclide ne era, con molta probabilità, a conoscenza. Il grande matematico francese Adrien-Marie Legendre se ne è interessato verso la fine del XVIII secolo e ne ha parlato al suo collega Joseph-Louis Lagrange, il quale suggerirà a sua volta al giovane Augustin-Louis Cauchy di studiare tale problema nel 1813. Sarà il primo risultato notevole del barone A.-L. Cauchy che diventarà poi uno dei più grandi matematici del suo secolo.

Cauchy si è interessato a poliedri convessi, vale a dire poliedri che non hanno spigoli rientranti. Per esempio la piramide che abbiamo costruito o il pallone da calcio sono convessi, mentre non lo è l'oggetto disegnato a destra in figura 2.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857); uno dei grandi matematici del suo tempo. (Negativo Archives de l'École Polytechnique)

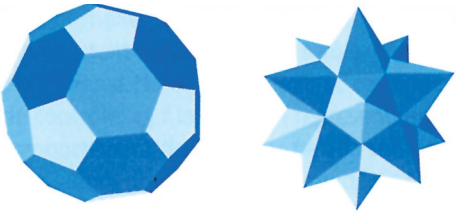


Figura 2. Un poliedro convesso ed un poliedro stellato, non convesso.

Il teorema formulato da Cauchy afferma che *tutti i poliedri convessi sono rigidi*. Questo significa che, se si costruisce un poliedro convesso con delle facce indeformabili (ad esempio in metallo) unite da cerniere lungo gli spigoli, la geometria globale dell'insieme impedisce alle giunture di muoversi. Il cono che abbiamo costruito è flessibile ma questo non invalida il teorema, infatti ad esso manca l'ultima faccia che è quella che rende rigida la piramide...

Fare matematica significa dimostrare ciò che si afferma: la dimostrazione di Cauchy è superba (anche se alcuni hanno fatto notare in seguito che essa era incompleta). Purtroppo non è lo scopo di tale piccolo articolo dare una idea della dimostrazione ma mi piacerebbe evidenziarne un "lemma", cioè un passo della dimostrazione.

Posiamo a terra una catena formata da sbarre metalliche unite l'una all'altra per un estremo, come in figura 3. In ognuno degli angoli di questa poligonale muoviamo le sbarre consecutive in modo

Il geode de la Villette città della Scienza, a Parigi, è un poliedro convesso formato da 1730 facce triangolari. La rigidità dei poliedri articolati dà luogo ad un grazioso problema di matematica che ha avuto soluzione solo nel 1997. (Nagativo Cosmos/R. Bergerot)

da diminuire l'angolo corrispondente; in questo modo accade che le due estremità della catena si avvicinano. Tutto ciò sembra evidente! Provate a dimostrarlo...

Per tanto tempo molti matematici si sono chiesti se anche i poliedri non convessi fossero rigidi; era possibile trovare una dimostrazione di rigidità che non usasse l'ipotesi di convessità? I matematici amano gli enunciati nei quali tutte le ipotesi sono utili per giungere alla tesi. Si è dovuto attendere più di 160 anni per rispondere a questo particolare interrogativo.

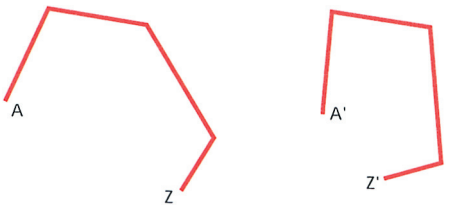


Figura 3. Se vengono diminuiti gli angoli fra i segmenti, gli estremi della catena di segmenti si avvicinano.

Nel 1977, il matematico canadese Robert Connelly ha provocato grande scalpore nella comunità matematica costruendo un poliedro (abbastanza complicato) che risultava essere flessibile e, per non contraddire il teorema di Cauchy, non convesso. In seguito la sua costruzione è stata un po' semplificata, in particolare da Klaus Steffen. In figura 4 è rappresentato un modello che permette al lettore di costruire il cosidetto *flessidromo* di Steffen. Tagliatelo e piegatelo lungo le linee; le linee continue sono gli spigoli sporgenti mentre le linee trateggiate sono quelli rientranti. Incollate i bordi liberi nel modo più naturale ed otterrete una specie di Shadok che è veramente flessibile (almeno un po'...).

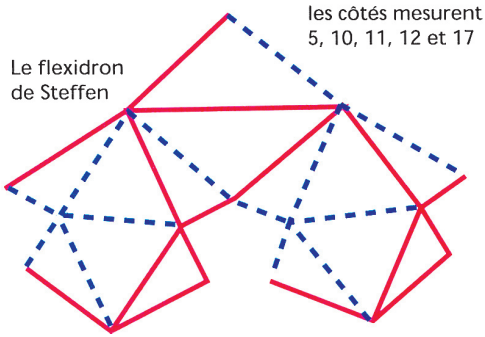


Figura 4. Il modello del flessidromo di Steffen.

Il volume di un poliedro varia deformandolo?

All'epoca i matematici furono incantati da questo nuovo oggetto. Un modello metallico fu costruito e posto nella sala da thè dell'istituto di Alti Studi Scientifici a Bures-sur-Yvette vicino a Parigi e ci si poteva divertire a farlo muovere; a dire il vero era non molto bello esteticamente e un po' cigolante. Si racconta che Dennis Sullivan ebbe l'idea di soffiare del fumo di sigaretta all'interno del flessidromo di Steffen e constatò che facendo muovere l'oggetto il fumo restava tutto all'interno... Da questo egli intuì che quando il flessidromo si deforma il suo volume rimane invariato. L'aneddoto è vero o è leggenda? Comunque sia, Connelly e Sullivan congetturarono che *quando un poliedro si deforma il suo volume resta costante*. Non è difficile verificare questa proprietà nell'esempio particolare del flessidromo di Connelly o anche per quello costruito da Steffen (a prezzo di calcoli complicati ma privi di interesse matematico), tuttavia la congettura in questione considera *tutti* i poliedri, compresi quelli che non sono mai stati praticamente costruiti! Tale problema è stato chiamato "congettura del soffietto": il soffietto del focolare emette aria quando si preme, in altri termini il suo volume diminuisce (del resto proprio questa è la sua funzione). Sicuramente un soffietto reale non corrisponde alla definizione di poliedro in quanto esso è in pelle e le sue facce si deformano costantemente, contrariamente a quanto accade per i poliedri le cui facce sono rigide.

Nel 1997 Connelly e due altri matematici I. Sabitov e A. Walz sono finalmente riusciti a dimostrare questa congettura. La loro dimostrazione è grandiosa e mostra ancora una volta le interazioni tra tutte le parti della matematica: per risolvere questo problema prettamente geometrico gli autori hanno utilizzato metodi molto raffinati di moderna algebra astratta. Non si tratta di una dimostrazione che Cauchy "avrebbe potuto trovare": le tecniche matematiche dell'epoca erano insufficienti. Vorrei ricordare una formula che a volte si apprende alla scuola secondaria. Se le lunghezze dei lati di un triangolo sono a, b e c, si può calcolarne facilmente la superficie. Per fare ciò si calcola a parte il semi-perimetro $p = (a + b + c)/2$ e poi si ottiene l'area estraendo la radice quadrata di $p(p - a)(p - b)(p - c)$. Questa elegante formula porta il nome del matematico greco Erone e proviene dalla notte dei tempi. Si può calcolare con una formula analoga il volume di un poliedro conoscendone la lunghezza degli spigoli?

I tre matematici sopracitati hanno dimostrato che è possibile fare ciò.

Essi cominciarono con un poliedro costruito a partire da un modello formato da un certo numero di triangoli chiamando $l_1, l_2, l_3, \ldots$ le lunghezze dei lati di questi triangoli (eventualmente molti numerosi). Essi provarono quindi che il volume V del poliedro deve soddisfare una certa equazione di grado n, cioè della forma $a_0 + a_1 V + \ldots + a_n V = 0$. Il grado n dipende dal modello utilizzato ed i coefficienti dell'equazione $(a_0, a_1, \ldots)$ dipendono esplicitamente dalla lunghezza dei lati $l_1, l_2, l_3, \ldots$. In altri termini, se si conosce il modello e le lunghezze dei lati, è possibile trovare l'equazione. Se il lettore ricorda che in generale una equazione ha una soluzione quando è di grado 1, due quando il grado è 2, egli può indovinare che una equazione di grado n non ha più di n soluzioni. Quindi, in conclusione, se si conosce il modello e le lunghezze dei lati di un poliedro, pur non conoscendo l'esatto valore del volume, si sa che tale volume non può avere che un numero finito di valori. Quando il flessidromo si deforma, il suo volume non può quindi variare (altrimenti il volume avrebbe un'infinità di valori successivi); questo volume è "bloccato" e la congettura del soffietto è dimostrata...

Sì, il problema del soffietto è degno di interesse

Questo problema è utile? È interessante? Che cosa è un problema matematico interessante? Questa domanda è una domanda difficile sulla quale i matematici sicuramente riflettono da molto tempo.

Ecco qualche possibile risposta, qualche tentativo di dare un "indice di qualità".

L'antichità è un primo criterio: i matematici sono molto sensibili alla tradizione, ai problemi enunciati da molto tempo, sui quali si sono interrogati più generazioni di studiosi. Inoltre un buon problema deve avere un enunciato semplice la cui dimostrazione porta a sviluppi sorprendenti, se è possibile, mettendo in relazione aree molto diverse della matematica. Il problema della rigidità di cui stiamo parlando è interessante da entrambi questi punti di vista.

La questione di capire se un problema matematico abbia applicazioni nella vita pratica è più sottile. I matematici rispondono in varie maniere. Senza dubbio le domande "pratiche", provenienti per esempio dalla fisica, servono molto spesso come motivazione alla matematica. A volte, nel cercare di risolvere un problema molto concreto, il matematico generalizza il problema alla risoluzione di un modello astratto: egli si serve del problema iniziale come *sorgente di ispirazione* e la effettiva risoluzione del problema concreto non è più la vera motivazione. Il problema della rigidità appartiene a quest'ultima categoria, infatti la sua origine dalla fisica è abbastanza chiara: la stabilità e la rigidità di strutture, per esempio, metalliche. Per ora, i teoremi e le costruzioni di Connelly non sono di nessuna utilità per gli ingegneri. Tuttavia appare evidente che questo tipo di ricerca non mancherà, in avvenire, di portare ad una migliore comprensione

globale della rigidità di svariate strutture costituite da un gran numero di elementi individuali (macromolecole, edifici, ecc...). Si tratta dunque di ricerche teoriche e "disinteressate" ma che hanno buone possibilità di essere utili nel futuro.

Étienne Ghys, Scuola Normale Superiore di Lione
CNRS-UMR 5669

Alcuni riferimenti bibliografici:

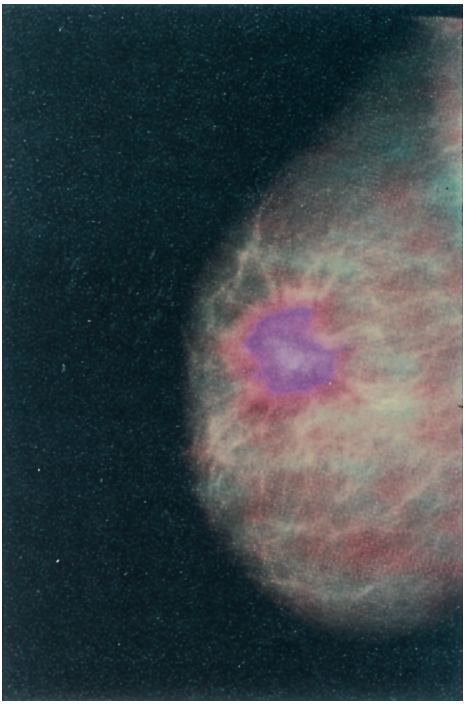
- M. Berger, *Géométrie, vol. 3.* - Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes (CEDIC/Nathan Information, 1977).
- R. Connelly, I. Sabitov, A.Walz, "*The bellows conjecture*", Beiträge Algebra Geom., 38 (1997), n. 1, pp. 1-10.
- R. Connelly, "*A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra*", Institut des Hautes ètudes Scientifiques, Publication Mathématique n° 47 (1977), pp. 333-338.
- N. H. Kuiper, "*Sphères polyédriques flexibles dans E3, d'après Robert Connelly*", Séminaire Bourbaki, 30e année (1977/78), exposé n. 514, pp. 147-168 (Lecture Notes in Math. 710, Springer, 1979).

Trovare un gene responsabile del tumore

Bernard Prum

Gli sviluppi della biologia moderna e soprattutto quelli della genetica molecolare richiedono dei nuovi strumenti matematici. Un esempio è fornito dal ruolo della statistica nella ricerca di un gene legato al tumore al seno.

Innumerevoli malattie hanno una componente ereditaria: il rischio che un individuo ha di esserne colpito è più o meno elevato a seconda che egli sia portatore di un gene detto di *suscettibilità* alla malattia in questione. È per questo che la genetica di oggi cerca di comprendere il ruolo dei diversi geni con particolare attenzione alla loro importanza nella eziologia dei malati. La speranza è quella di poter mettere a punto un piano di terapia in futuro. Prendiamo come esempio il tumore al seno che, in Francia, colpisce circa una donna su otto. Accanto ad alcuni fattori di rischio (alimentazione, tabacco, esposizione alle radiazioni, etc...), si è identificato da qualche anno un gene le cui mutazioni sono rintracciate nelle donne affette da tumore al seno. Questo gene è stato chiamato BRCA1 (per "breast cancer 1"). Tale risultato, di natura biomedica, non può essere ottenuto che grazie ad una serie di analisi statistiche che, come vedremo, hanno permesso di localizzare il gene in modo sempre più preciso. La genetica ha a lungo ignorato la materia



In questa mammografia, con i colori alterati, è visibile, in rosa, un tumore cancerogeno. Una parte della ricerca sul cancro al seno è rivolta al suo aspetto genetico. La statistica gioca qui un ruolo decisivo. (Negativo Kiugs College School/SPL/Cosmos)

di cui sono fatti i geni. È da poco più di vent'anni che si ha accesso in modo massiccio alle sequenze di DNA, la catena di molecole che realizza l'informazione genetica trasmessa dai genitori ai figli. Tuttavia, l'ignoranza della composizione chimica dei geni non ha affatto impedito di ottenere risultati raffinati sull'eredità di certi caratteri.

La prima domanda che ci si pone di fronte ad una malattia come il tumore (nel caso che stiamo esaminando, quello al seno) è: "È una malattia genetica? Esistono, cioè, dei geni che provocano una predisposizione a questa malattia?". Per il tumore la risposta è stata a lungo incerta. Ci si aspetta una risposta positiva se si riscontrano alcuni casi della stessa malattia in una stessa famiglia e si può quindi attribuire alla figlia o alla sorella di una donna colpita da una malattia un rischio più alto di contrarla rispetto alla media della popolazione. Per molto tempo lo statistico genetico ha avuto come dati di base alberi genetici come quello di figura 1.

Che fare di un tale albero genetico? Si è detto, appena dopo Mendel, che un carattere ereditario è spesso determinato da un "gene" in grado di prendere diverse forme, chiamato *allele*. Ogni individuo eredita un allele da suo padre ed uno dalla madre mediante una combinazione genetica che avviene nel concepimento. Quindi il genetista propone un modello di trasmissione della malattia che suppone l'intervento di certi geni ed alleli. Il compito dello statistico è di valutare questo modello con l'aiuto di documenti appropriati che permettono, ad esempio, di

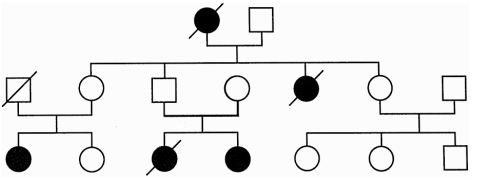


Figura 1. Una famiglia in cui si osserva una concentrazione di cancro al seno. I quadrati indicano gli uomini, i cerchi le donne. Un individuo è indicato in nero se ne è malato, in barrato se defunto. Si vede che la nonna, una delle figlie e tre nipoti hanno avuto un cancro. Beninteso, la malattia può presentarsi ad altri membri della famiglia. È a partire da tali studi che i genetisti sono stati portati a supporre l'esistenza di geni suscettibili alla malattia.

eliminare le ipotesi più semplici come quella che la malattia non abbia alcuna componente genetica. Dai casi di malattie più studiate si passa a quelle di eziologia complessa (come i tumori al seno), dove intervengono dei fattori ambientali la cui incidenza dipende dall'età del soggetto: è opportuno trattare i dati in dipendenza dal tempo e bisogna dunque fare appello alla statistica dei processi. È un ramo elaborato della matematica che si basa in gran parte sui risultati di teoria delle probabilità ottenuti dalla scuola francese negli anni '80 (P. A. Meyer, J. Jacod) e quelli di statistica, principalmente dovuti alla scuola scandinava.

Le statistiche per determinare il cromosoma portatore del gene

Una volta stabilita, dall'analisi dell'albero genetico, l'esistenza di un gene di

suscettibilità per il tumore al seno, la seconda tappa consiste nel localizzarlo, almeno grossolanamente, in uno dei 23 cromosomi presenti nell'uomo. Per questo si hanno a disposizione dagli anni '80 dei marcatori: essi sono delle piccole catene di DNA ben determinate che si possono leggere a minor "costo", grazie ad una analisi chimica piuttosto rapida. Essendo relativamente facili da localizzare, i marcatori permettono per esempio di valutare la somiglianza fra zone di cromosomi esaminate in persone malate e consanguinee. Più grande è la somiglianza di una stessa zona di cromosoma presente in persone consanguinee infette, più elevata è la probabilità che questa zona contenga un gene implicato nella malattia.

Ma una tale analisi, puramente statistica, è complicata dal fatto che ogni genitore non trasmette ai figli i cromosomi che egli ha ereditato dai genitori, ma una "ricombinazione" di questi (Figura 2). Se consideriamo due geni situati all'inizio su uno stesso cromosoma, essi potrebbero, dopo la ricombinazione, trovarsi su due cromosomi diversi. La probabilità che questo accada è in proporzione più alta che se i due geni fossero lontani. Analizzare il tasso di uguaglianza in un cromosoma è quindi un processo aleatorio. Grazie alla statistica dei processi si può individuare un intervallo lungo il quale è possibile trovare un gene di suscettibilità. L'uso dei marcatori ha così permesso al gruppo americano di Jeff M. Hall, a Berkeley, di localizzare nel 1990 il gene BRCA1 sul cromosoma 17.

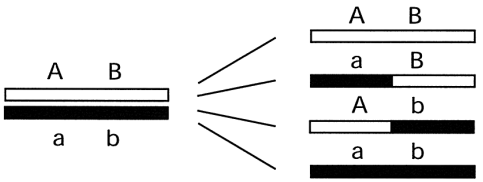


Figura 2. Per ogni coppia di cromosomi di un individuo, un cromosoma è ereditato da suo padre (in nero nella figura) e l'altro da sua madre (in bianco). Un genitore trasmette ad ogni figlio un solo cromosoma di ciascuna specie. Ma, prima della trasmissione, i cromosomi di ogni coppia possono scambiarsi "pezzi" in modo casuale. Questo processo, detto di ricombinazione fa sì che ogni genitore trasmetta al figlio un cromosoma ricombinato (in una delle quattro possibilità indicate nella figura, in cui si suppone che i cromosomi si scambino due pezzi).

Leggere la molecola di DNA per decifrare completamente il gene e le sue forme anormali

Poi si tratta di localizzare in modo più preciso il gene e determinarne la struttura. Si dice che il DNA, il materiale che contiene l'informazione genetica, è una lunga catena molecolare "scritta" in un alfabeto di 4 lettere (A,C,G,T), iniziali di quattro tipi di molecole con cui esso è formato. Le banche genetiche riportano molti miliardi di tali lettere (non ne arrivano che 25 milioni al giorno...).

La precisione del metodo dei marcatori permette in media di localizzare un gene su una sequenza di DNA contenente all'incirca 4 milioni di lettere. Per sapere esattamente quale allele o quale mutazione è responsabile, per esempio, del

tumore al seno, bisogna "leggere" queste sequenze su soggetti sani e confrontarle con quelle lette su individui malati.

Questo permette di trovare un "errore di battuta" in un testo di 4 milioni di caratteri, una quantità paragonabile a quanti ce ne sono in un libro di 2000 pagine o, meglio in tanti libri di 2000 pagine quanti sono gli individui da studiare. Questo procedimento è oneroso perfino con mezzi informatici potenti. Ora nell'uomo i geni non costituiscono più del 3% dei cromosomi. Il resto del materiale cromosomico è qualificato come *intergenico*. Se si riuscisse a limitare la ricerca degli errori di battitura ai soli geni, si ridurrebbe la sequenza da esplorare ad una trentina di pagine, il cui confronto è cosa agevole per un qualsiasi calcolatore.

Ma come è possibile distinguere i geni dal resto? Si dimostra che lo "stile" con cui sono scritti i geni è diverso dallo "stile" intergenico: le frequenze di successione delle lettere non sono le stesse. Si può cercare di sfruttare questa differenza di stile per *annotare* la frequenza e distinguere i geni dalla parte intergenica. La sfida è ardua. Si deve fare appello a dei modelli statistici chiamati *catene di Markov nascoste*, sviluppati negli anni '80, in rapporto specialmente con dei problemi di riconoscimento automatico delle parole; essi sono stati adattati alla genomica e sono stati messi a punto, nello stesso tempo, degli algoritmi capaci di caratterizzare le differenze di "stili" e di attribuire uno stile ad ogni posizione sul cromosoma.

È così che si è riusciti a localizzare precisamente il BRCA1. Oggi si può anzi leggerlo facilmente su ogni malato. Questo gene di suscettibilità al tumore al seno è composto da 5592 lettere e se ne conoscono più di 80 alleli. Resta un nuovo lavoro per lo statistico: stabilire le relazioni fra i diversi alleli e l'incidenza di questo tumore.

La biologia offre alla matematica un nuovo terreno di azione

L'esempio del gene BRCA1 suggerisce che, nei prossimi anni, la biologia giocherà nei confronti della matematica un ruolo paragonabile a quello svolto dalla fisica nel corso di buona parte del XX secolo: offrirà un campo di applicazione ai recenti progressi tecnici e provocherà l'elaborazione di nuovi strumenti (qui abbiamo riportato solo gli sviluppi statistici, ma avremmo potuto riportare altri campi della matematica come i sistemi dinamici, l'ottimizzazione e la geometria; infatti la conformazione spaziale delle molecole gioca un ruolo essenziale nella loro funzione). Una nuova sfida oggi è stata lanciata allo statistico: attualmente è possibile disporre qualche migliaia di reagenti su una superficie di vetro di un centimetro quadrato (detti "pulci") e sapere così quali geni agiscono ed in quali tessuti in quelle date condizioni sperimentali o ...in quelle delle cellule tumorali. Le misure effettuate in laboratorio, in centinaia di condizioni diverse, forniscono ai ricercatori un numero considerevole di dati numerici che

caratterizzano l'espressione di migliaia di geni. Ad oggi, solo delle analisi statistiche possono pretendere di elaborare una così grande mole di dati sperimentali. Questo potrebbe portare a precisare i legami tra geni e malattie.

Bernard Prum
Laboratorio Statistico
e Genomico (UMR CNRS 8071).
La Génopole, Università di Évry.

Alcuni riferimenti bibliografici:

- B. Prum, "*Statistique et génétique*" *dans Development of Mathematics* 1950-2000 (sous la dir. de J.-P. Pier, Birkhäuser, 2000).
- C. Bonaïti-Pellié, F. Doyon et M. G. Lé, "*Où en est l'épidémiologie du cancer en l'an 2001*", Médecine-Science, 17, pp. 586-595 (2001).
- F. Muri-Majoube et B. Prum, "*Une approche statistique de l'analyse des génomes*", Gazette des mathématiciens, n. 89, pp. 63-98 (juillet 2001).
- B. Prum, "*La recherche automatique des gènes*", La Recherche, n. 346, pp. 84-87 (2001).
- M. S. Waterman, *Introduction to computational biology* (Chapman & Hall, 1995).

Compressione di immagini: l'uso delle *wavelets*

Stéphane Mallat

Che siano immagazzinate nelle memorie informatiche o che viaggino attraverso internet, le immagini occupano molto spazio. Fortunatamente è possibile "condensarle" senza alterare troppo la loro qualità!

Figura 1. Queste tre immagini illustrano la potenza del metodo della compressione virtuale. L'immagine originale (A) è formata da 512×512 *punti; ciascuno di essi ha un determinato livello di grigio, preso da una tavolozza con* 256 *livelli. L'immagine (B) è il risultato di una compressione per un fattore* 8*, realizzata riducendo il livello di grigio a soli* 2 *valori (bianco o nero). L'immagine (C) è stata ottenuta da (A) attraverso una compressione di fattore* 32 *utilizzando una base di wavelets. La differenza di qualità con l'immagine iniziale è appena percepibile (Figura dell'autore).*

Una immagine digitale si comprime così come è possibile ridurre tutto il succo di una arancia a qualche grammo di polvere liofilizzata. Non si tratta di un gioco di abilità ma di tecniche matematiche ed informatiche che permettono di ridurre lo spazio occupato da una immagine in un calcolatore o in un cavo di comunicazione. Esse oggi sono indispensabili per immagazzinare informazioni e per trasmetterle via internet, per telefono, per satellite o altro. La compressione di una immagine rappresenta quest'ultima per mezzo di un numero ridotto di parametri, eliminandone la ridondanza. Un esempio caricaturale ci aiuterà a comprendere meglio l'idea di principio: nel caso di una immagine completamente bianca è inutile precisare

esplicitamente quale sia il livello di grigio corrispondente a ciascuno dei punti che la compongono; sarebbe più lungo che affermare semplicemente che:"tutti i punti della immagine sono bianchi". Il problema della rappresentazione è un tema centrale della matematica e le sue applicazioni vanno al di là della compressione dei dati. In questi ultimi dieci anni, si sono ottenuti progressi considerevoli grazie allo sviluppo della teoria delle *wavelets* (dette *ondine* in italiano). Nel campo del trattamento delle immagini, questi progressi hanno portato all'adozione di un nuovo standard di compressione detto JPEG-2000. Questa storia ha numerosi risvolti che illustrano bene il ruolo della matematica nel moderno panorama scientifico e tecnologico.

Trentadue volte meno spazio grazie alle wavelets

Consideriamo un'immagine come quella della figura 1A. Essa è costituita da 512×512 punti, i cui livelli di grigio possono variare da 0 (nero) a 255 (bianco). Ognuno dei 255 livelli di grigio possibile può essere rappresentato da un ottetto, vale a dire un numero binario costituito da 8 bits (praticamente è una successione di otto cifre che possono essere solo 0 o 1, come ad esempio 11010001). Sono quindi necessari $512 \times 512 \times 8 = 2097152$ bits, che sono tanti, per codificare una sola immagine di questo tipo. La prima idea che viene in mente è quella di ridurre il numero dei bits: diminuire il numero di livelli di grigio, per esempio, limitandosi al bianco o al nero, come accade in figura 1B. I due valori possibili di livello di grigio si codificano con un solo bit (che vale 0 o 1) ed il numero di bits necessari per memorizzare l'immagine è stato quindi diviso per otto. Chiaramente la qualità dell'immagine è molto peggiorata. Guardate ora l'immagine in figura 1C. Essa è codificata con un numero di bits minore di trentadue volte rispetto a quello necessario per memorizzare l'immagine originaria, mediante l'uso delle wavelets, tuttavia la degradazione della qualità è appena percettibile. Perchè? Perchè al posto di ridurre la precisione è stata modificata la modalità di rappresentazione dell'informazione.

In principio c'era l'analisi di Joseph Fourier...

Come si è detto, l'immagine digitale è definita da 512×512 numeri che specificano l'intensità luminosa di ciascun punto. Si può dunque interpretare questa immagine come un punto in uno spazio di 512×512 dimensioni, nello stesso modo in cui un punto su una superficie (spazio a due dimensioni) può essere individuato da due coordinate, e domandarsi quali siano gli assi coordinati più appropriati per rappresentare tale punto. Un sistema di assi (di natura più astratta dei famigliari assi della geometria elementare) definisce quella che si chiama una *base*.

Una prima anticipazione fondamentale è stata realizzata dal fisico-matematico Joseph Fourier nel 1802, in una sua memoria dell'Accademia delle Scienze sulla propagazione del calore, argomento a priori senza alcuna relazione con il nostro

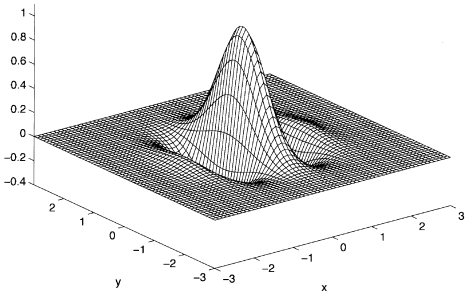


Figura 2. Il grafico di una wavelet utilizzata durante una compressione di immagini.

problema. In particolare, Fourier ha mostrato che, per rappresentare in modo compatto e semplice una funzione $f(x)$ (dal punto di vista matematico, una funzione è l'associazione di un valore ad un punto di uno spazio avente un'infinità di dimensioni), si possono utilizzare degli "assi" costruiti con l'aiuto di un insieme infinito di funzioni sinusoidali. In termini più precisi: Fourier ha mostrato che si può rappresentare una funzione $f(x)$ con una somma infinita di funzioni seno e coseno della forma $\sin(ax)$ o $\cos(ax)$, ciascuna di esse con un certo coefficiente.

Queste "basi di Fourier" sono diventate un mezzo essenziale, di uso molto frequente nelle scienze, perchè esse servono a rappresentare tanti tipi di funzione, quindi tante grandezze fisiche. In particolare si utilizzano anche per rappresentare suoni o immagini. Tuttavia, gli ingegneri sanno bene che queste sinusoidi sono lontane dall'essere ottimali per descrivere segnali così complessi come le immagini: esse non rappresentano efficacemente delle strutture transitorie come i contorni di una immagine.

...in seguito è arrivata la "trasformata in wavelets"

Gli specialisti del trattamento dei segnali non sono stati gli unici a prendere coscienza dei limiti delle basi di Fourier. Negli anni '70, un ingegnere-geofisico francese, Jean Morlet, si è reso conto che esse non erano i migliori strumenti matematici per esplorare la conformazione del sottosuolo; questo ha condotto alla scoperta - nel laboratorio di Elf-Aquitaine - della *trasformata in wavelets*. Questo metodo matematico, basato su un insieme di funzioni di basi diverse dalle funzioni sinusoidali utilizzate nel metodo di Fourier, sostituisce vantaggiosamente la *trasformata di Fourier* in certe situazioni. D'altra parte, negli anni '30, i fisici si erano accorti che le basi di Fourier non erano molto adatte per analizzare lo stato di un atomo. Questo problema è stato all'origine di numerosi lavori che ulteriormente hanno contribuito molto alla teoria delle wavelets. Sempre durante gli anni '30, alcuni matematici hanno tentato di migliorare le basi di Fourier per analizzare le strutture singolari localizzate; questo ha aperto un importante programma di ricerca tuttora molto attivo. In altre parole, una moltitudine di scienziati ha sviluppato, con i mezzi a disposizione, delle opportune modifiche delle basi di Fourier. Negli anni '80, Yves Meyer, un matematico francese, ha scoperto le prime basi di wavelets ortogonali (l'ortogonalità designa una proprietà che facilita molto i ragionamenti ed i calcoli; le basi di Fourier sono anch'esse orto-

gonali). Questa scoperta, seguita da qualche incontro improvvisato attorno a fotocopiatrici o tavoli dei caffè, ha avviato in Francia un vasto movimento scientifico pluridisciplinare, il cui impatto internazionale fu notevole. Le applicazioni della teoria e degli algoritmi di wavelets hanno fatto il loro cammino non solamente in numerosi campi scientifici e tecnologici, ma sono anche all'origine della creazione di moltissime imprese negli Stati Uniti d'America.

La matematica delle wavelets ha giocato un ruolo centrale in numerose aree

Questo tipo di matematica è stata di fondamentale importanza per catalizzare idee, "ripulire" concetti e approfondire la ricerca. Nell'analizzare i concetti fondamentali delle specifiche applicazioni, tale teoria ha permesso a scienziati che lavoravano in campi molto diversi – nella fisica, nel trattamento dei segnali, in informatica, etc... – di rendersi conto che utilizzavano gli stessi strumenti. Andare oltre, affinare questi strumenti di lavoro, migliorare le loro prestazioni: questi moderni lavori matematici sull'analisi di Fourier hanno reso possibile tutto ciò. Infine questa teoria ha fornito una tecnica standard di calcolo scientifico (la trasformata in wavelets rapide), ottenuta grazie alla collaborazione tra matematici e specialisti in teoria dei segnali. L'immagine della figura 1C è stata pertanto ottenuta grazie alle stesse basi di wavelets usate in statistica, in sismica o nel calcolo scientifico, applicando l'algoritmo di trasformata rapida. Mediante l'uso dello standard internazionale JPEG-2000 per la compressione delle immagini, queste wavelets invadono tutti i settori nei quali abbia rilevanza una immagine, da internet agli apparecchi fotografici digitali e perfino ai satelliti.

Rimane da costruire un ponte tra il mondo delle wavelets e quello della geometria

Le basi di Fourier non erano state ben adattate all'analisi dei fenomeni transitori come invece lo sono le basi di wavelets. È la conclusione della storia? No. Nel trattamento delle immagini, come in tutti gli altri settori dove le wavelets sono divenute un mezzo di base, tutti cercano di risolvere attualmente lo stesso tipo di problema: esplorare le regolarità geometriche. In effetti, si dice che una immagine, per complessa che sia, può essere ben rappresentata da un disegno composto da relativamente pochi tratti e, spesso, i contorni degli oggetti raffigurati si possono assimilare a delle curve geometriche abbastanza semplici. Sfruttare queste analogie geometriche e la regolarità di queste curve dovrebbe quindi permettere di migliorare considerevolmente i risultati ottenuti fino a oggi; ma la teoria delle wavelets, per il momento, non ne è capace. La costruzione di questo ponte con il mondo della geometria genera difficili problemi mate-

matici. Tuttavia la posta scientifica ed industriale in gioco è importante e c'è da aspettarsi progressi significativi rilevanti nei prossimi anni.

Stéphane Mallat
Dipartimento di Matematica Applicata,
Scuola politecnica, Palaiseau

Alcuni riferimenti bibliografici:

- B. B. Hubbard, *Ondes et ondelettes - La saga d'un outil mathématique* (Pour la Science/Belin, 1995).
- S.Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes* (École polytechnique/ Ellipses, 2000).
- Y. Meyer, *Ondelettes et algorithmes concurrents* (Hermann, 1992).

Impedire alle onde di fare rumore

Daniel Bouche

Come sfuggire all'intercettazione di un radar?
Qual'è la forma ottimale di un muro anti-rumore?
Si possono migliorare le immagini ecografiche?
Per ricevere una risposta soddisfacente, queste domande necessitano di analisi tecniche molto approfondite.

Che cos'è un'onda? Solo una persona molto furba sarebbe in grado di dare una risposta a questa domanda che sia nello stesso tempo precisa e unica! Comunque le onde sono onnipresenti e costituiscono il quotidiano lavoro di un gran numero di scienziati e di ingegneri. In termini un po' vaghi ed intuitivi, si può dire che un'onda è la propagazione di un segnale, di una perturbazione, in un certo mezzo e ad una certa velocità.

Gli esempi non mancano. Un esempio sono i cerchi concentrici che si creano sulla superficie dell'acqua gettando in essa un piccolo sasso; essi rappresentano una perturbazione dell'altezza che si propaga. La distanza tra due cerchi successivi è detta *lunghezza d'onda* ed è una grandezza fondamentale nella descrizione dei fenomeni ondulatori. Oppure vi sono le onde sonore: esse mettono in gioco le variazioni della pressione e della densità del mezzo ambiente (di solito l'aria), queste variazioni si riproducono in particolari frequenze (quelle udibili). Le onde acustiche sono della stessa natura e comprendono sia le onde sonore che quelle emesse a frequenze che l'orecchio umano non può percepire. Quando si propagano all'interno di un solido, si parla piuttosto di onde elastiche, di cui fanno parte le onde sismiche che attraversano il nostro pianeta e vengono rilevate dai sismografi.

Il caso delle onde elettromagnetiche è particolarmente importante. Esse sono delle variazioni di campi elettrici e magnetici che si propagano nel vuoto alla velocità della luce. La luce visibile, gli infrarossi, gli ultravioletti, i raggi X, i raggi gamma, le micro-onde, le onde radio, le onde radar, sono tutti casi particolari di onde elettromagnetiche. Ciò che distingue l'una dall'altra è la loro frequenza o la loro lunghezza d'onda (qualche frazione di micrometri per la luce visibile ed ancora meno per i raggi ultravioletti, raggi X e raggi gamma, da qualche centimetro fino a centinaia di metri per le onde radar e radio). Lo studio del comportamento delle

Il "piccolo duca" è un drone (piccolo aereo telecomandato) sviluppato dalla Dassault Aviation. È un apparecchio "furtivo": la sua forma ed il materiale usato sono scelti in modo da essere invisibili alle onde radar. Tale scelta è fatta in seguito a calcoli complessi che si basano sulla propagazione delle onde; in alcuni casi la precisione dei calcoli lascia a desiderare e resta l'oggetto di nuove ricerche (Negativo di Dassault Aviation).

onde non serve solo a comprendere la natura di ciò che ci circonda, ma anche a controllare un'enorme quantità di tecniche scientifiche che permette, a fortiori, di concepire invenzioni molto raffinate. Il comportamento delle onde luminose è essenziale per tutti i tipi di strumenti ottici, sia che si tratti di apparati per la fotografia, che di microscopi, apparecchi di telemetria, etc... Si può pensare alle onde radar ed alle loro applicazioni militari, alla concezione, per esempio, di mezzi militari furtivi, che sfuggono cioè alla intercettazione dei radar. Per quanto riguarda le onde acustiche, si possono trovare esempi di sale da concerto o teatri concepiti in modo da avere una acustica ottimale o si possono ricordare i materiali e strutture che assorbono i rumori, i dispositivi anti-rumore attivi (vale a dire che emettono onde sonore opposte a quelle del rumore in modo da neutralizzarlo), degli apparecchi per l'ecografia o per la distruzione dei calcoli renali, degli apparecchi per il controllo non distruttivi (ricerca dei difetti nelle parti di un aereo ad esempio), etc...

Equazioni conosciute ma difficili da risolvere con precisione

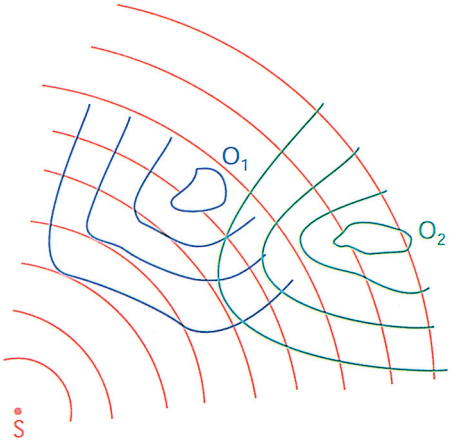
Le equazioni che descrivono i diversi tipi di onde sono ben conosciute da tanto tempo. Anzi, quelle relative alle onde elettromagnetiche sono state formulate dal fisico scosseze James Clark Maxwell da più di un secolo, intorno al 1870. Ma non è sufficiente conoscere le equazioni alle quali obbedisce, per esempio, un'onda radar per sapere come essa si propagherà, come interagirà con l'ostacolo – costituito da un aereo o qualche altro oggetto che si cerca di individuare e localizzare – come si rifletterà verso l'antenna che l'ha emessa. È necessario in effetti poter risolvere queste equazioni la cui incognita è il campo ondulatorio, vale a dire le ampiezze dell'onda in ogni punto dello spazio ed in ogni istante. Questo problema non è affatto facile. Si tratta di equazioni alle derivate parziali dove intervengono la funzione che determina l'ampiezza incognita dell'onda al variare del tempo e del punto considerato e le sue derivate parziali rispetto a tempo e spazio. Tali equazioni vanno risolte con opportune "condizioni al bordo". Queste condizioni specificano matematicamente alcuni dati essenziali come i valori del campo ondu-

latorio nell'instante iniziale, la forma dell'ostacolo ed il modo in cui l'onda si comporta sulla sua superficie (riflessione, assorbimento, ecc...), la maniera in cui l'ampiezza d'onda decresce a grande distanza dalla superficie dell'ostacolo.

La soluzione di questo tipo di problemi, dove l'onda è rifratta (o deviata e modificata) dagli oggetti, è complessa: essa necessita di strumenti matematici, alcuni semplici e conosciuti da molto tempo, altri molto più elaborati ed ancora in fase di sviluppo. Più in generale, del resto, le equazioni alle derivate parziali rappresentano un ramo importantissimo della matematica, che è oggetto di ricerca da più di duecento anni. Una volta stabilite le equazioni e le loro condizioni al contorno, uno dei primi compiti della matematica consiste nel formulare il problema in termini rigorosi e dimostrare che le equazioni hanno soluzione e, in questo caso, la soluzione sia unica (altrimenti il problema è mal posto o la modellizzazione è incompleta). Un tale studio può essere arduo e non si sa sempre tracciarlo bene, ma permette di assicurarci che non ci si lancerà invano in calcoli spesso complicati!

L'analisi matematica permette di formulare rigorosamente il problema e di mettere a punto metodi risolutivi efficienti

Una volta formulato rigorosamente il problema, si tratta di proporre dei metodi efficaci per risolverlo, con sufficiente precisione. La risoluzione analitica, cioè quella mediante la quale si ottiene un risultato esatto, espresso in generale da una formula compatta, è quasi sempre fuori portata, salvo i casi eccezionali o quelli banali. Lo scienziato o l'ingegnere devono spesso accontentarsi di una risoluzione numerica – realizzata dal computer a causa della gran mole di calcoli da effettuare – che fornisce il risultato sotto forma di valori numerici che approssimano la soluzione effettiva. Anche in questo caso compaiono notevoli difficoltà. Nei problemi che mettono in gioco la diffrazione delle onde da parte degli oggetti, il mezzo di propagazione è spesso illimitato: l'onda può allontanarsi all'infinito dal punto in cui è



Un problema tipico di propagazione di onde: una sorgente S emette un'onda radar, luminosa, acustica o altro (in rosso in figura) di lunghezza (d'onda) ben definita; l'onda si riflette parzialmente (in blu e verde sulla figura) sui due ostacoli presenti O_1 e O_2; quale sarà l'ampiezza dell'onda risultante, punto per punto, ad esempio in un punto S in cui è stato messo un sensore? La soluzione di un problema, così complesso, deve prendere in esame il tipo di onde emesse, la loro lunghezza d'onda, la forma degli ostacoli, il materiale con cui sono formate, ecc.

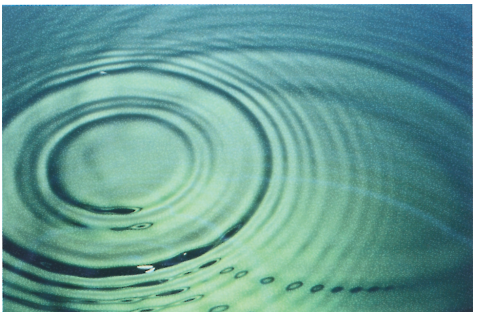
originata. Affinché la soluzione sia unica è necessario imporre una condizione, detta di irraggiamento, che specifica come l'ampiezza dell'onda decresca in funzione del suo allontanamento dalla fonte. Questa condizione non è semplice da imporre numericamente. Una della soluzioni proposte consiste nel trasformare l'equazione alle derivate parziali di partenza in una *equazione integrale* (equazione nella quale le funzioni incognite compaiono nell'integrando); il vantaggio di tale formulazione è che essa soddisfa automaticamente la condizione di irraggiamento.

È dagli anni '60 che sono stati scritti i primi programmi informatici per la risoluzione delle equazioni integrali. Essi permettevano di calcolare solo la diffrazione di oggetti piccoli rispetto alla lunghezza d'onda e, per giunta, in modo imperfetto a causa delle carenze di conoscenza dei metodi di analisi matematica. Una migliore comprensione dei problemi e la loro risoluzione, hanno permesso, a partire dalla fine degli anni '80, di calcolare con sempre maggiore precisione la diffrazione di un'onda in oggetti sempre più grandi rispetto alla lunghezza d'onda. Le ricerche odierne si sviluppano in diverse aree: scegliere la formulazione integrale più adatta al problema ed elaborare le tecniche numeriche più adatte per risolvere date equazioni. In particolare i metodi detti *multipolari* hanno permesso di aumentare notevolmente lo spettro dei problemi trattabili. Questi lavori hanno contribuito alla realizzazione di strumenti logici affidabili, capaci di calcolare con precisione il campo ondulatorio diffratto da oggetti di dimensione di una dozzina di volte maggiore della lunghezza d'onda. Questo è in particolare il caso di un aereo in un campo radar di una certa lunghezza d'onda.

Un metodo, parallelo alla formulazione di equazioni integrali, consiste nel risolvere direttamente l'equazione alle derivate parziali, liberandosi della condizione di irraggiamento, limitando artificialmente il mezzo di propagazione con "condizioni al bordo assorbenti": queste condizioni stabiliscono matematicamente una frontiera immaginaria che assorbe completamente tutte le onde. Tali condizioni sono state a lungo responsabili di fenomeni di riflessioni parassite: esse erano generate nel caso particolare di oggetti totalmente diffrangenti. Ma le tecniche numeriche che utilizzano le condizioni assorbenti al contorno sono anche considerevolmente progredite; esse offrono attualmente un livello di riflessione parassita molto debole, grazie a lavori teorici realizzati per la maggior parte all'inizio degli anni '90.

L'ottica geometrica e le sue generalizzazioni al servizio delle onde corte

Quando la dimensione degli ostacoli su cui si diffraggono le onde è molto grande rispetto alla lunghezza d'onda (una goccia d'acqua illuminata dalla luce visibile, un aereo analizzato da un radar con lunghezza d'onda di qualche metro, etc...), esiste una via un po' più facile della risoluzione diretta delle equazioni differenziali delle onde per comprendere come avviene il fenomeno: la buona vecchia



Alcune onde si propagano sulla superficie dell'acqua: anche per questo semplice fenomeno quotidiano può essere difficile darne una buona descrizione (con una certa precisione). (Foto: Getty Images)

ottica geometrica. Tale applicazione della geometria alla fisica delle onde assimila le onde luminose a raggi che si propagano in linea diretta in un determinato mezzo e sono sottoposte alle semplici leggi della riflessione e della rifrazione, scoperte molti secoli prima delle equazioni che descrivono le onde elettromagnetiche. Uno degli apporti dei fisici, in particolare del tedesco Arnold Sommerfeld (1868-1951), è stato di mostrare come l'ottica geometrica risolva definitivamente il problema della diffrazione nel caso di oggetti che sono infinitamente grandi rispetto alla lunghezza d'onda.

Ovviamente gli oggetti reali non hanno taglia infinita, quindi l'ottica geometrica non può che essere una approssimazione più o meno precisa. Anche questo settore della matematica è stato capito e generalizzato al fine di determinare il campo ondulatorio nei punti dove l'ottica geometrica classica prevedeva solo ombra. Questi lavori, cominciati negli anni '50, proseguono tuttora; essi permettono di costruire strumenti, alcuni meno precisi dei metodi di risoluzione numerici delle equazioni alle derivate parziali, ma che sono più semplici e sono operanti nel campo delle lunghezze d'onda corte.

Malgrado tutti questi progressi, numerosi problemi ondulatori non sono ancora stati risolti in modo soddisfacente. Tra questi, per esempio, c'è la diffrazione di onde, di forma complessa, su oggetti di grandi dimensioni rispetto alla lunghezza d'onda (il caso di un aereo, o di un missile, quando si vuol tenere conto della loro forma dettagliata fino alla dimensione dei bulloni e non solo del loro aspetto generale). C'è ancora molto da fare!

Daniel Bouche
CEA (Commissariato per l'Energia Atomica)
Dipartimento di fisica teorica ed applicata,
Direzione d'Île de-France

Alcuni riferimenti bibliografici:

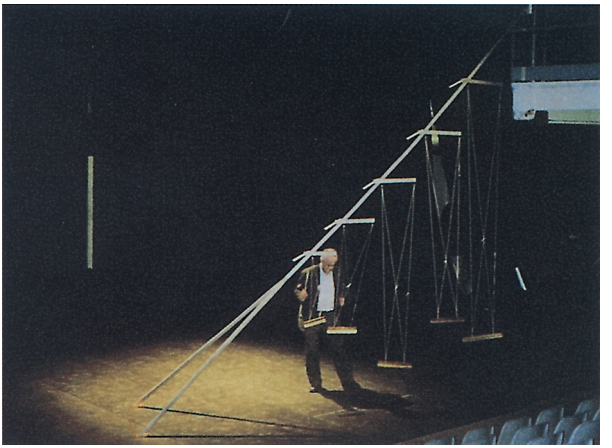
- Site Internet du projet de recherche "Ondes" à l'INRIA: http://www.inria.fr/recherche/equipes/ondes.fr.html
- G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves* (Wiley, 1974).
- D. S. Jones, *Acoustic and electromagnetic waves* (Oxford University-Press, 1986).
- J. A. Kong, *Electromagnetic wave theory* (Wiley, 1990).
- E. Darve, "*The fast multipole method: numerical implementation*", Journal of Computational Physics, 160 (1), pp. 195-240 (2000).
- D. Bouche et F. Molinet, *Méthodes asymptotiques en électromagnétisme* (Springer-Verlag, 1994).

Quando arte fa rima con matematica

Francine Delmer

La matematica non ispira solo gli scienziati. Numerosi artisti vi hanno attinto la materia per le loro opere. Talvolta è vero anche il viceversa, come nel caso della prospettiva, dove l'arte ha aperto il cammino a teorie geometriche.

Dal novembre 2000 al gennaio 2001 la *Galerie Nationale du Jeu de Paume* presenta una retrospettiva dell'artista François Morellet, che il critico Thomas McEvilley definisce, nel catalogo della mostra, "pitagorico moderno". Nel febbraio 2001 Tom Johnson si vede attribuire il premio *Victoire de la musique* per la sua *Kientzy Loops*. Il compositore americano elabora trasposizioni musicali di successioni che



Si racconta che Galileo aveva osservato, nella cattedrale di Pisa, le oscillazioni di alcuni lampadari, appesi al soffitto, durante una cerimonia religiosa. Ebbe l'idea di contare queste oscillazioni e notò che le loro frequenze erano diverse ma che erano inversamente proporzionali alla radice quadrata della lunghezza del pendolo. È su questa constatazione che si basa l'opera Galileo del compositore Tom Johuson. In essa i pendoli sono appesi ad una struttura, disegnata e costruita dall'artista -ingegnere di Bordeaux Eric Castagnés. (Negativo di Eric Castagnès)

agiscono come regole, devia gli automatismi, declina il triangolo di Pascal (*Self-Replicating Loops, Canons rhythmiques*, ecc.). I concetti matematici sono sempre una premessa per le opere di questo compositore che persegue da lunga data dialoghi e scambi fruttuosi con Jean-Paul Allouche, ricercatore negli ambiti della teoria dei numeri e dell'informatica teorica, Nello stesso anno, *Proof* di David Auburn, che mette in scena la vita di matematici, ottiene il premio Pulitzer per il teatro. Scritta per un pubblico di neofiti, questa opera offre una visione interessante del lavoro del ricercatore e mette in risalto talune caratteristiche di questo ambiente. Vi si possono scorgere degli ammiccamenti alla storia recente e singolare del matematico americano John Forbes Nash e allusioni alla storia della dimostrazione del teorema di Fermat da parte del ricercatore inglese Andrew Wiles.

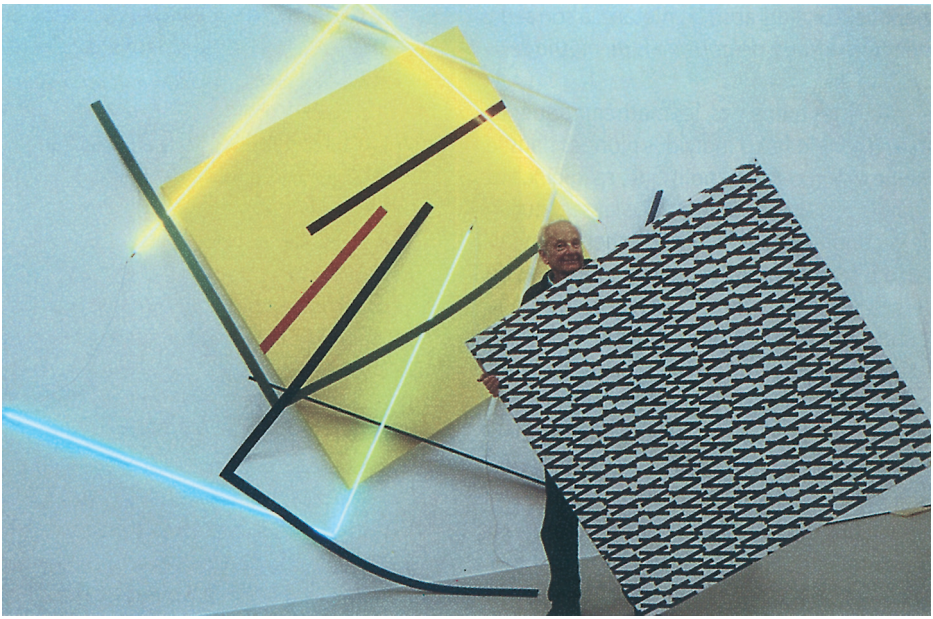
Questi tre avvenimenti, ripresi dai media, illustrano l'attualità dell'attrazione reciproca fra matematici e artisti. Senza interruzioni, nella storia, le relazioni fra essi hanno percorso tutti gli ambiti artistici e si manifestano a livelli assai diversi, come testimoniano i dibattiti di epistemologi, artisti e matematici sulla realtà e sulla pertinenza di tali legami. Non si cercherà qui di legittimare delle creazioni artistiche con i loro riferimenti a teorie scientifiche, né di formulare un giudizio di valore o di intraprendere una qualsiasi classificazione delle attività matematiche e artistiche; ci limiteremo solo a mettere in luce tali legami con lo stesso sguardo di un puntinista.

Legami di ogni tempo fra arte e matematica

Si dice che fu per la costruzione delle piramidi che gli Egiziani, circa 2700 anni prima della nostra era, utilizzarono il "triangolo sacro" di lati 3, 4, 5 che forma un angolo retto (queste misure verificano la relazione "quadrato dell'ipotenusa = *somma* dei quadrati degli altri due lati" che caratterizza i triangoli rettangoli). Si pensi anche alle teorie pitagoriche – che risalgono a circa 5 secoli prima di Cristo – dei rapporti numerici che governeranno le leggi dell'armonia musicale. Più vicino a noi, Albrecht Dürer e Leonardo da Vinci, figure emblematiche dello spirito umanista del Rinascimento, si sono interessati di geometria, di ottica, di architettura e alle questioni teoriche e pratiche inerenti a questi ambiti. Dürer, nutrito delle riflessioni e dei lavori degli artisti italiani, in particolare Piero della Francesca e Leon Battista Alberti, fissò le regole della prospettiva nel suo trattato di geometria *Underweysung der Messung* (1525). Da allora gli artisti ne avrebbero fatto largamente uso nelle loro opere, mentre i matematici francesi Girard Desargues e (successivamente) Gaspard Monge ne avrebbero tratto spunto per sviluppare nel XVII e XVIII secolo la geometria proiettiva e descrittiva. Bisogna osservare in questo caso specifico la preminenza dell'arte sulla scienza: come spiega lo storico dell'arte Eric Valette, "l'invenzione della prospettiva è certamente uno degli esempi più lampanti in cui il sistema simbolico dell'arte porta una conoscenza del mondo ancora ignota alla scienza".

In letteratura la matematica potrebbe apparire meno presente. Tuttavia i membri dell'Oulipo (Ouvroir de littérature potentielle (Laboratorio di letteratura potenziale), fondato nel 1960 da Raymond Queneau e François Le Lionnais scrittori e matematici) vi attingono spesso le loro regole di scrittura. Così, in *La vie mode d'emploi*, di Georges Perec, le molle dell'intreccio rispondono al problema combinatorio del quadrato bi-latino ortogonale di ordine dieci.

Nel XX secolo la creazione musicale è stata segnata dai compositori Pierre Boulez e Iannis Xenakis, entrambi di formazione matematica. Boulez sviluppa nelle sue composizioni i principi del serialismo, mentre Xenakis si richiama a un controllo statistico dei parametri musicali nella sua *musica stocastica*, per citare solo un esempio delle loro molteplici creazioni. L'IRCAM, creato nel 1970 da Pierre Boulez e in seno al quale lavorano numerosi musicisti, esperti di acustica, matematici e informatici – di formazione mista – attesta ancora una volta l'interconnessione profonda fra la matematica e la musica in questo inizio di XXI secolo, sia a livello tecnico che a livello teorico. Una interessante messa in prospettiva delle questioni relative a questo argomento fu presentato nel corso del Quarto Forum Matematico Diderot organizzato nel 1999 dalla società europea di matematica, sotto il titolo *Logica matematica, logica musicale nel XX secolo*.



L'artista François Morellet, un "moderno postpitagorico". (Negativo Gamma/Raphäel Gaillarde)

La matematica, talvolta semplice strumento, talvolta motore teorico della creazione

Questi pochi esempi illustrano la varietà delle relazioni fra matematica e arte e pongono qualche domanda. La matematica è utilizzata dall'arte per ragioni tecniche o teoriche? Ispira gli artisti in modo metaforico o simbolico?

Il pittore François Morellet, già citato, utilizza la matematica più che altro come strumento: lo testimoniano le sue opere *Répartition aléatoire de quarante mille carrés suivant les chiffres pairs et impairs d'un annuaire de téléphone* (Distribuzione aleatoria di quarantamila quadrati che seguono le cifre pari e dispari di un elenco telefonico), *π ironicon n° 2*, ecc. in cui suggerisce l'idea di infinito. Secondo il critico d'arte Gilles Gheerbrandt "in lui, la matematica (elementare) può servire alla formulazione dei problemi, ma essa è semplicemente un mezzo, mai un fine in sé". L'artista, dal canto suo, afferma di usare la matematica per sfuggire a ogni tipo di soggettività e affettività, per mantenere una distanza di fronte all'opera, per desensibilizzarla; egli si riallaccia così con l'antica ideologia platonica che vedeva nella fascinazione dell'arte nient'altro che illusione.

Se alcuni artisti usano della matematica alcune nozioni elementari solo come riferimento o pretesto, altri le mettono alla base della propria creazione principi e teorie, attingendo così all'essenza del ragionamento. Il pittore Albert Aymé uno degli esempi più radicali di totale immersione nell'astratto, fa leva su un processo analogo a quello della ricerca matematica. Rigettando i meccanismi combinatori, egli sviluppa la sua riflessione in alcuni trattati – *Approche d'un langage spécifique* (Approccio a un linguaggio specifico), *Sur les paradigmes* (Sui paradigmi), ecc. - che danno il quadro di un progetto pittorico: "Mi sforzo di portare avanti il mio lavoro con il rigore di uno scienziato, ma senza per questo distaccarmi dalla passione del poeta o del musicista". L'opera, alla fine, può fare a meno della teoria e resta "intrinsecamente bella", poiché l'arte astratta, a suo avviso, "non è questione di gusto, ma di metodo".

In quanto attività umane, matematica e arte sono il risultato del lavoro di individui calati nello stesso clima culturale politico e religioso. Le grandi spaccature della storia influenzano ciascuno dei due ambiti (artistico e matematico) secondo interazioni che sembrano frutto dello spirito dei tempi. Non è forse vero, infatti, che, mentre gli scritti filosofici di Henri Poincaré rendono popolari le idee della geometria non euclidea all'inizio del XX secolo, i cubisti spazzano via la prospettiva tradizionale?

Bisogna tuttavia essere consci del fatto che ogni volontà di fusione o di unificazione di matematica e arte sarebbe riduttiva nonché vana. Sono proprio la conoscenza e la curiosità che permettono scambi e confronti con approcci propri di ciascuna forma d'espressione. Constatiamo solamente con piacere che matematica e arte , ancora e

sempre, compongono un insieme armonioso.

Francine Delmer
Laboratorio Aritmetico e Algoritmico sperimentale
Università di Bordeaux I, Talence

Alcuni riferimenti bibliografici

- E. Valette, *La perspective à l'ordre du jour* (L Harmattan, 2000).
- G. Gheerbrant, "François Morellet", *Parachute, Montréal*, n. 10, p. 5 (primavera 1978).
- M. Loi (ed.), *Mathématiques et arts* (Hermann, 1995).
- J.-L. Binet, J. Bernard, M. Bessis (ed.), *La création vagabonde* (Hermann, collection Savoir, 1980).
- V. Hugo, *L'art et la science* (Anaïs et Actes Sud, 1864/1995).
- M.Sicard (ed.), *Chercheurs ou artistes* (Autrement, série Mutations, n. 158, 1995).
- I. Xenakis, *Arts/sciences. Alliages* (Casterman, 1979).
- J.-M. Lévy-Leblond, *La pierre de touche - la science à l'épreuve* (Gallimard, 1996).
- J. Mandelbrot, "Les cheveux de la réalité - auto-portraits de l art et de la science", *Alliage*, 1991.
- D. Boeno, "De l'usage des sections coniques", *Cahiers art et science*, n. 5, pp. 41-54 (Confluences, 1998).

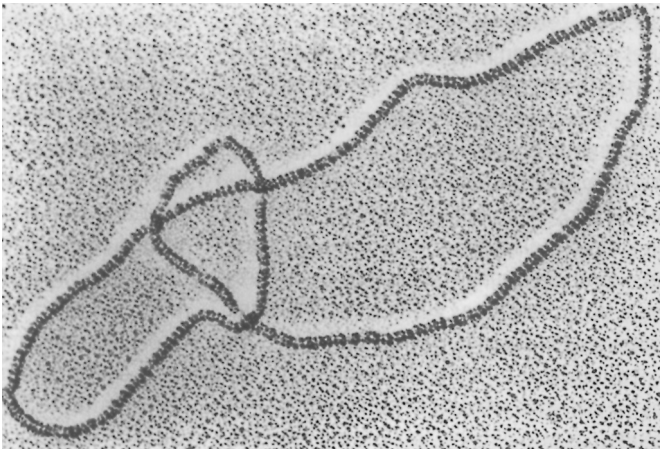
Dal DNA alla teoria dei nodi

Nguyen Cam Chi e Hoang Ngoc Minh

L'attività biologica della molecola di DNA dipende in modo particolare dalla sua disposizione nello spazio e dal modo nel quale è intrecciata - questioni che sono di competenza della teoria matematica dei nodi

Nessuno oggi lo può ignorare: il DNA è la molecola che, in ciascuna cellula degli esseri viventi, reca l'informazione genetica e comanda per larga parte l'attività cellulare. Il DNA è composto in generale da due lunghi filamenti paralleli costituiti da una concatenazione di molecole dette *basi nucleotidiche*. I due filamenti girano l'uno attorno all'altro formando una struttura elicoidale: la famosa *doppia elica*.

L'informazione trasmessa dal DNA è codificata dalla sequenza di coppie di basi nucleotidiche. Tale sequenza non dipende dal modo in cui la molecola è attorcigliata o annodata. Tuttavia, negli anni '60-'70, dopo la scoperta delle molecole di DNA



Una molecola del DNA, circolare ed annodata, vista al microscopio elettronico. La topologia della molecola del DNA ha influenza sulla sua attività. (Negativo N. Cozzarelli, Università di Berkeley)

circolari (anelli composti da un solo filamento o da due filamenti arrotolati l' uno attorno all'altro), gli scienziati hanno cominciato a porsi interrogativi sull'influenza della forma topologica del DNA, cioè della sua disposizione nello spazio. Nel 1971 il biochimico americano James Wang ha messo in evidenza che certi enzimi, le *topo-isomerasi*, possono modificare la configurazione topologica del DNA, per esempio creando dei nodi, e che la topologia della molecola di DNA influisce sul suo funzionamento nella cellula. Lo studio delle configurazioni topologiche del DNA ci può dunque dare informazioni sul modo in cui esso interviene nei meccanismi cellulari. La topologia, che taluni definiscono la "geometria del caucciù" – cioè lo studio delle proprietà che non vengono modificate da una deformazione da una variazione delle lunghezze – è una branca importante e fondamentale della matematica. I suoi concetti e i suoi metodi sono indispensabili quasi in ogni campo della matematica. La teoria dei nodi ne è un'emanazione. Nata circa un secolo fa, essa cerca di studiare precisamente la struttura dei nodi, e di classificarli. La teoria dei nodi ha trovato applicazioni in altre discipline scientifiche (in chimica molecolare, in fisica statistica, in fisica teorica delle particelle, ecc.), oltre a legami con altri ambiti della ricerca matematica.

La domanda fondamentale della teoria dei nodi è la seguente: dati due nodi (non troppo semplici!) realizzati per esempio con del filo, è possibile dire se essi sono equivalenti? In altri termini, è possibile deformarne uno, senza tagliarlo, per renderlo identico all'altro? Siccome i topologi si occupano delle deformazioni, la loro definizione di nodo è leggermente diversa da quella dell'uomo della strada: per essi un nodo non si ottiene unendo le due estremità del filo; altrimenti si potrebbe – tirandolo e deformandolo opportunamente – sciogliere qualsiasi nodo e tutti i nodi sarebbero quindi equivalenti. Dal punto di vista della topologia, dunque, un nodo è costituito da uno o più "anelli" – è questo il caso del DNA circolare.

Classificare i nodi cercando degli "invarianti": un problema di topologia algebrica.

Gli specialisti dei nodi sono di solito studiosi della topologia algebrica: essi cercano di associare ad ogni nodo topologicamente diverso un "invariante", un oggetto matematico che lo caratterizza, facilmente calcolabile e che si presta a manipolazioni algebriche. Tale oggetto matematico può essere, *a priori*, un numero, un polinomio (un'espressione algebrica come $x^6 - 3x^2 + +x + 2$) o qualcosa di più complicato e astratto. Ciò che conta è che tale oggetto sia lo stesso per tutti i nodi topologicamente equivalenti (da cui il termine *invariante*). L'ideale sarebbe trovare invarianti che caratterizzino *completamente* i nodi, cioè tali che due nodi distinti abbiano obbligatoriamente invarianti distinti. A quel punto il problema della classificazione sarà risolto. In sintesi, le domande principali sono: esiste un modo di caratterizzare i nodi al fine di distinguerli? Esiste un algoritmo per distinguere due nodi? È pos-

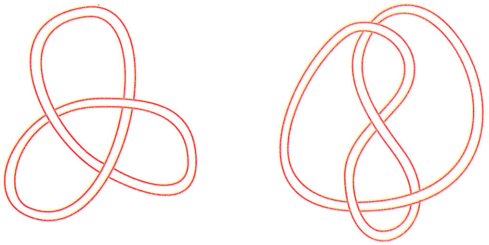
sibile scrivere un programma informatico che consenta a un computer di distinguere due nodi in un tempo ragionevole?

Malgrado diversi anni di ricerca, la risposta a queste domande rimane incompleta. Tuttavia sono stati compiuti importanti progressi. Ricordiamone qualcuno, brevemente. Nel 1928 il matematico americano James Alexander ha introdotto il primo invariante polinomiale (il *polinomio di Alexander*) che permetteva di classificare alcuni nodi. Ma il polinomio di Alexander è un invariante incompleto: esistono nodi non equivalenti che hanno lo stesso polinomio di Alexander. Molto più recentemente, nel 1984, il matematico neozelandese Vaughan Jones ha scoperto un nuovo invariante, anch'esso polinomiale; è più efficace del polinomio di Alexander, ma nemmeno esso risolve interamente il problema della classificazione. Qualche tempo dopo, altri ricercatori hanno raffinato e generalizzato l'invariante di Jones; ma ancora una volta i nuovi invarianti polinomiali introdotti sono incompleti e falliscono nel distinguere certi nodi topologicamente non equivalenti.

Un abbozzo di soluzione completa è forse intervenuto verso il 1990 con i lavori del ricercatore moscovita Victor Vassiliev. Quest'ultimo ha introdotto una nuova classe di invarianti definiti in modo implicito, cioè definiti solo per mezzo delle relazioni che essi devono verificare reciprocamente. Gli invarianti di Vassiliev sono numerici, vale a dire che a ciascun nodo è associato un numero (che si può determinare a partire da un'analisi combinatoria della topologia del nodo). Vassiliev ha congetturato che questi invarianti formino un sistema completo, in altre parole che due nodi distinti abbiano invarianti di Vassiliev diversi. Fino ad ora non è stato trovato ancora alcun controesempio e la congettura rimane aperta. Così come rimane aperto il problema di trovare metodi effettivi ed efficaci per calcolare gli invarianti di Vassiliev. Ad ogni modo, il passo avanti è stato notevole.

Esiste un parallelo tra trasformazioni matematiche e meccanismi enzimatici.

Le ricerche matematiche appena descritte sono legate alle domande che i biologi si pongono a proposito di molecole come il DNA. Per esempio, verso il 1973, il matematico britannico John Conway ha introdotto delle operazioni "chirurgiche" elementari, chiamate *tangle* e *mutation*, che consentono di trasformare un nodo in un altro modificandolo in corrispondenza dell'incrocio di due suoi filamenti. Ora, queste queste operazioni di natura matematica (topologica) hanno degli equivalenti biochimici, che vengono realizzati tramite topo-isomerasi. Tali enzimi, indispensabili al funzionamento di tutte le cellule, sono in grado dapprima di tagliare uno dei due filamenti (o entrambi i filamenti dell'anello di DNA circolare e far passare un segmento dell'anello attraverso l'apertura) e richiudere infine le estremità tagliate formando un nodo in ciascun anello. Effettuando queste operazioni di taglio e di rincollamento, le topo-isomerasi possono tagliare un filamento, fare passare l'altro



I due nodi qui riportati sono topologicamente distinti: non si può passare dll'uno all'altro tirando soltanto i fili, senza tagliare e reincollare. Il nodo di sinistra (nodo a trifoglio) ha, per polinomio di Alexander, il polinomio $P(t) = t^2 - t + 1$*; quello di destra ha per polinomio di Alexander* $P(t) = t^2 - 3t + 1$*. Come deve accadere, i due polinomi sono distinti. Tuttavia esistono nodi distinti associati allo stesso polinomio di Alexander: i polinomi di Alexander non costituiscono invarianti completi.*

attraverso l'apertura così ottenuta e ricucire le estremità (*tangle*), oppure operare due tagli e rincollare i due filamenti alla rovescia (*mutation*).

Ora, in che modo la topologia del DNA può influenzare la sua attività biologica? Illustriamolo sull'esempio dell'arrotolamento della molecola di DNA. Nella loro posizione abituale i due filamenti descrivono un certo numero di giri attorno all'asse della doppia elica molecolare. Alcune topo-isomerasi possono aumentare o ridurre questo avvolgimento, un po' come si può arrotolare o srotolare il filo del telefono, modificando la forma della molecola. Ciò che più importa, in un DNA circolare, il numero di giri della doppia elica è una proprietà topologica invariante: nessuna modificazione che non coinvolga tagli e ricostruzione di filamenti lo può far variare. Se un anello di DNA non è arrotolato si vede agevolmente che la doppia elica si fa meno compatta e che la sua parte interna diviene più esposta all'azione degli enzimi che la circondano. Una simile esposizione precondiziona la replicazione (formazione di un secondo esemplare della molecola) del DNA e la trascrizione del suo codice (processo che conduce la cellula a sintetizzare proteine).

Poiché la configurazione topologica del DNA è determinata da un meccanismo enzimatico, una domanda che legittimamente i biologi si pongono è in quale misura una classificazione topologica dei nodi permetta di risalire ai processi enzimatici in azione. Una questione intimamente collegata è quella di sapere se è possibile simulare tutti i meccanismi enzimatici in azione facendo uso delle operazioni di base introdotte per i nodi "astratti". La ricerca ai confini fra la matematica dei nodi e la biologia molecolare è ben lungi dall'essere conclusa.

Nguyen Cam Chi e Hoang Ngoc Minh
Dipartimento di matematica e di informatica,
Università di Lille 2

Alcuni riferimenti bibliografici:

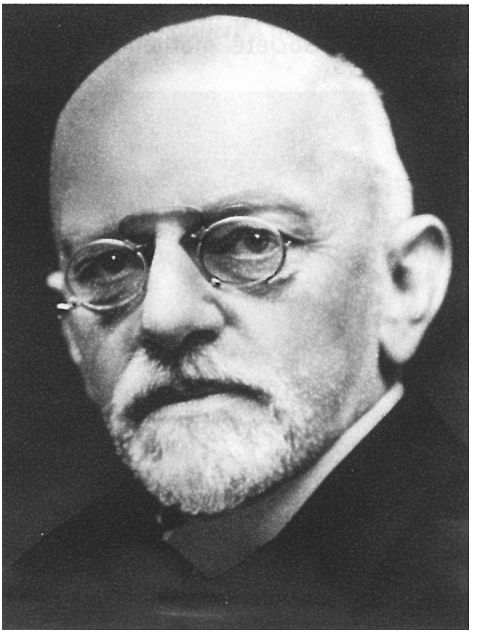
- *La science de noeuds*, dossier hors-série de Pour la Science, aprile 1997
- A. Sossinsky, *Noeuds- Genèse d'une théorie mathématique* (Seuil, 1999)
- D. W. Sumners "Lifting the curtain: using topology to prob the hidden action of enzymes", *Notices of the American Mathematical Society, 42 (5)*, pp. 528-537 (maggio 1995).

Il filosofo e il matematico

Pierre Cassou-Noguès

Per tutto il corso della loro storia, la filosofia e la matematica hanno mantenuto una relazione tanto stretta quanto misteriosa. Dovrebbe risalire a Platone nel mondo greco e a Cartesio all'albori dell'età moderna. Evochiamo qui due grandi figure del ventesimo secolo, David Hilbert e Edmund Husserl.

Edmund Husserl e David Hilbert si incontrano a Göttingen nel 1901. Il filosofo, Husserl, ha seguito studi di matematica. A Berlino è stato assistente di Karl Weierstrass, grande matematico analista, prima di incontrare Franz Brentano a Vienna, e di rivolgere la sua attenzione alla filosofia. Ha pubblicato nel 1891 la "Filosofia dell'aritmetica". Il primo tomo delle sue "Ricerche logiche" esce nello stesso periodo in cui il filosofo si stabilisce a Göttingen. Il matematico, Hilbert, è a Göttingen dal 1897. Ha risolto un problema famoso nell'ambito della teoria degli invarianti, il "problema di Gordan", che da una ventina d'anni impensieriva i geometri tedeschi. Ha sviluppato, in algebra, la "teoria dei corpi algebrici". Husserl e Hilbert hanno pressappoco la stessa età. Si incrociano alla facoltà di filosofia che raduna, in realtà, filosofi e matematici. Sia l'uno che l'altro stanno per trasformare la propria disciplina. Husserl scopre la fenomenologia. Hilbert fonda il metodo



David Hilbert (1862-1943) è stato, con il francese Henri Poincaré, uno dei grandi matematici del 1900. Per la profondità dei suoi lavori e del suo punto di vista, per il dinamismo che ha saputo creare a Göttingen, ha esercitato una influenza notevole sui matematici del XX secolo. (Negativo ARG)

astratto che caratterizza la matematica moderna.

Göttingen, luogo d'eccellenza matematica, accoglie i filosofi.

Se Göttingen non era che una cittadina vicino a Stollgan, essa diviene, poco dopo il 1900, il centro del mondo matematico. Felix Klein è a capo della facoltà. Questo grande geometra, che ha stabilito in modo definitivo l'esistenza di spazi non euclidei, rinuncia alla ricerca e si consacra ai suoi corsi sullo sviluppo della matematica fino al diciannovesimo secolo, e all'amministrazione della facoltà, per la quale trova nuovi fondi. Egli chiama a Göttingen Hilbert e successivamente Hermann Minkowski. Quest'ultimo introdurrà, durante una celebre lezione, il "continuum di spazio e tempo" che porta il suo nome e che sarà utilizzato da Einstein per formulare la teoria della relatività. Ogni settimana, la Società matematica di Göttingen si riunisce attorno ad un conferenziere, di Göttingen o di fuori. Husserl, il filosofo, parla nell'aprile del 1901 del problema degli immaginari in aritmetica. Göttingen è un luogo consacrato alla matematica. Si racconta che un giorno Min-

Uno degli edifici per la matematica a Göttingen, l'Istituto di matematica applicata e numerica, come è oggi. Dal 1900 al 1930 Göttingen è stato per i matematici un centro rinomato in tutto il mondo, grazie agli sforzi di David Hilbert. Qui i matematici affiancavano il loro studio a quello dell filosofia e delle altre scienze. (Negativo Università di Göttingen)

kowski, mentre passeggiava per la via principale, vide un giovane pensieroso, in preda a qualche tormento; egli lo toccò gentilmente su una spalla e gli disse: "Non si tormenti, converge", e allora il giovane si allontanò, rassicurato.

È a Göttingen che Hilbert sviluppa il metodo astratto della matematica moderna. Il metodo astratto è nato nell'algebra del diciannovesimo secolo. Richard Dedekind e Leopold Kronecker, in particolare, hanno introdotto quelle che vengono chiamate strutture. Si definisce una struttura matematica, ad esempio quella di "gruppo", di "spazio vettoriale", di "corpo", determinando le leggi che le operazioni verificano, senza considerare la natura degli oggetti su cui queste operazioni agiscono. In questo modo, una stessa struttura si può applicare a oggetti di natura diversa, a numeri, a funzioni, a trasformazioni geometriche, etc. L'astrazione, in matematica, consiste nell'allontanarsi, ovvero nel fare astrazione, dalla natura degli oggetti, per considerare solo le relazioni che sussistono tra gli oggetti stessi. Questo punto di vista, che emerge nell'algebra di Dedekind e che è restato anonimo fino al diciannovesimo secolo, è stato formalizzato da Hilbert.

Hilbert dà una formulazione assiomatica della geometria.

Dal suo arrivo a Göttingen, Hilbert annuncia un corso di geometria. Questo corso, che sarà pubblicato con il titolo *I fondamenti della geometria*, si appoggia al metodo astratto per dare una formulazione assiomatica della geometria. Hilbert si allontana dalla natura degli oggetti geometrici, il punto, la retta, il piano, e si accontenta di porre tra loro delle relazioni, le cui le proprietà sono rese esplicite attraverso gli assiomi. Detto in altro modo, gli assiomi fissano le proprietà delle relazioni esistenti tra oggetti la cui natura resta indeterminata. Quindi, gli assiomi definiscono una struttura, in modo analogo a quanto fatto per le strutture algebriche. Ma, nel passaggio dall'algebra alla geometria, il primato della struttura è rafforzato. In algebra, si dà una strutura supponendo noti gli oggetti, numeri, funzioni. Si può dimostrare un teorema a partire dalla struttura o ragionando sugli oggetti con la loro propria natura. In compenso, per assiomatizzazione, il ragionamento è ridotto a una semplice deduzione a partire dagli assiomi e gli oggetti sono definiti solamente in rapporto agli assiomi. Gli assiomi, e cioè la struttura, sono sufficienti per definire gli oggetti e per fare dimostrazioni su questi stessi oggetti.

Attraverso la sua assiomatizzazione della geometria e i suoi lavori successivi, Hilbert rende esplicito il metodo astratto dell'algebra, lo rende radicale e l'utilizza per produrre nuovi risultati. In realtà, Hilbert rivisita e trasforma in chiave astratta tutta la matematica del suo tempo: la geometria, l'algebra e la teoria dei numeri, con una prima dimostrazione della "congettura di Waring" nel 1909; l'analisi, dove introduce gli

spazi di Hilbert, spazi astratti in cui, ad esempio, le funzioni sono i "punti". Il metodo astratto sarà ripreso, a Göttingen, dalla scuola di Emmy Noether e di Emil Artin, e poi, in Francia, dal gruppo Bourbaki. Nutrirà pertanto tutta la matematica.

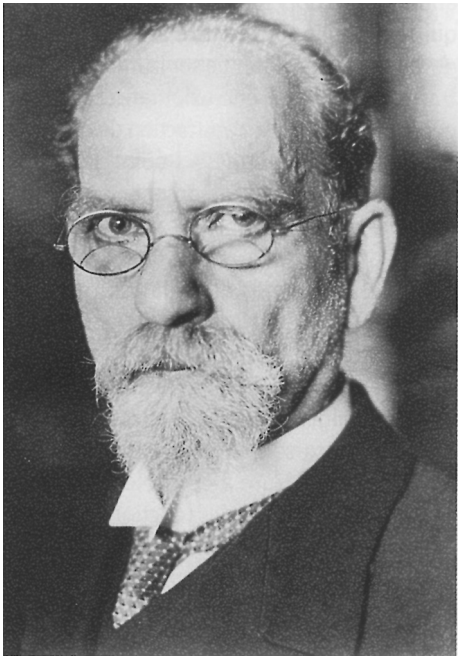
Dare un fondamento alla matematica.

Parallelamente, Hilbert sviluppa il metodo astratto per promuovere un programma di fondamenti della matematica. Dare fondamenti alla matematica significa dare ai suoi ragionamenti una garanzia estrema. Si tratta in particolare di giustificare i ragionamenti che presuppongono un infinito esistente in atto, i ragionamenti *trasfiniti*, tutto nel risparmio dell'ipotesi dell'esistenza dell'infinito. Il programma *formalista* comporta due tappe. Il primo compito è quello di formalizzare le teorie matematiche. Si considera un alfabeto di simboli. Si fissano le regole, analoghe all'ortografia e alla grammatica, per costruire una formula a partire da questi simboli. Si esplicitano gli assiomi, che serviranno da premesse alle dimostrazioni, e le leggi per dedurre una formula da un'altra. La matematica sarà rimpiazzata da un insieme di formule. Una dimostrazione consiste in una manipolazione dei simboli secondo regole esplicite, a prescindere dal significato dei simboli. Una dimostrazione si presenta come un assemblamento di simboli conforme a regole esplicite, uno schema costruito secondo leggi che abbiamo fissato. Il secondo compito è quello di dimostrare la non-contraddizione di questi sistemi formali per mezzo di ragionamenti al finito, cioè che non facciano intervenire l'infinito attuale.

La prima teoria a cui Hilbert tenta di applicare questo programma è l'aritmetica, che comporta già dei ragionamenti trasfiniti. Così, Hilbert apre una *teoria della dimostrazione*, che consiste in ragionamenti al finito che poggiano su schemi che rappresentano le dimostrazioni in un sistema formale. Tuttavia, nel 1931, il logico austriaco Karl Gödel stabilisce che è impossibile dimostrare, per mezzo di ragionamenti al finito, la non-contraddizione di un sistema formale che comprenda l'aritmetica elementare. Bisogna dunque rinunciare al programma iniziale di Hilbert.

Il metodo astratto e il programma formalista hanno affascinato i filosofi.

Rimane il fatto che Hilbert è riuscito a trasformare una questione filosofica, quella dei fondamenti, in un problema matematico, trattato per mezzo del metodo astratto e che si poggia su una nuova teoria, la teoria della dimostrazione, che è viva ancora oggi. Di rimando, il metodo astratto e il programma formalista che la teoria sottintende, hanno esercitato una sorta di fascino sui filosofi. Subito nelle *Ricerche logiche* del 1901, poi nella *Logica formale e logica trascendentale* del



Edmund Husserl (1859-1938), che si è in parte ispirato a problemi matematici per costruire la sua visione filosofica. (Negativo AKG)

1929, Husserl integra la rappresentazione astratta della matematica alla fenomenologia nascente. Husserl fa distinzione tra la matematica applicata, che comprende ad esempio la geometria in quanto teoria del nostro spazio, lo spazio in cui viviamo, e una matematica formale. A partire da una teoria applicata, un matematico ne estrae l'architettura e isola un sistema di assiomi che egli può poi far variare per ottenere nuove forme per possibili teorie. Così, la matematica formale appare come una teoria delle teorie o, nel vocabolario di Husserl, una *apofantica formale*, che mira a definire e classificare tutti i sistemi possibili di giudizi logici. Inoltre, come aveva mostrato Hilbert, procedere in modo assiomatico porta a fare astrazione dalla natura degli oggetti. Come conseguenza, ad ogni forma di teoria corrisponde un dominio di oggetti, oggetti qualunque, determinati soltanto dal fatto che soddisfano un tale sistema di assiomi. La teoria delle forme della teoria rappresenta dunque una *ontologia formale*, una teoria fatta per "qualche cosa", che mira a definire e a classificare, solamente per la loro forma, tutte le molteplicità possibili d'oggetti. La matematica formale comporta due orientamenti: è apofantica formale, quando i matematici volgono la loro attenzione verso i sistemi di giudizi logici; è ontologia formale, quando si concentrano sui domini d'oggetti. Se Hilbert, che aveva esaminato da vicino la geometria del diciannovesimo secolo, disponeva dei concetti di forme di teoria e di molteplicità formale prima del 1901, è certo che l'incontro con Hilbert e le discussioni alla Società matematica di Göttingen hanno giocato un ruolo decisivo nell'elaborazione di una fenomenologia sistematica.

Hilbert è riuscito a portare all'interno della matematica la questione dei fondamenti. Si tratta di un processo di interiorizzazione da parte della matematica di una questione filosofica. Husserl ha eseguito il processo di interiorizzazione, inverso, del metodo astratto della matematica nella filosofia. Il percorso dei due uomini, il filosofo Husserl

e il matematico Hilbert, testimonia un'interiorizzazione, reciproca e concomitante, della matematica da parte della filosofia e della filosofia da parte della matematica.

Pierre Cassou-Noguès
CNRS, Laboratoire Savoirs et Textes,
Università Lille III

Alcuni riferimenti bibliografici

- P. Cassou-Noguès, *Hilbert*, (Les Belles Lettres, 2001)
- P. Cassou-Noguès, *De l'expérience mathématique. Essai sur la philosophie des sciences de Jean Cavaillès*, (Vrin, 2001)
- J. T. Desanti, *La philosophie silencieuse* (Seuil, 1975)
- D. Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen* (Springer-Berlin, 1931-1935)
- E. Husserl, *Recherches logiques*, tr. fr. H.Elie, A.L.Kelkel et. R. Schérer, P.U.E., 1959)
- C. Reid, *Hilbert* (Springer 1970)
- H. Sinaceur, *Corps et modèles* (Vrin, 1991)

Come razionalizzare le vendite all'asta?

Jean-Jacques Laffont

In particolare grazie ad Internet, le vendite all'asta si diffondono. La modellizzazione di questi processi di vendita permette di definire le regole e le strategie ottimali per la loro utilizzazione.

Le aste sono una forma di vendita e di acquisto sempre più diffusa. Questo avviene in particolare su Internet, come testimonia il successo fulmineo del sito eBay, dove beni di tutti i tipi – dai libri alle automobili, non trascurando oggetti d'arte o elettrodomestici – sono messi all'asta. Metodo per collocare risorse rare, le aste sono tradizionali nei mercati di prodotti d'allevamento e d'agricoltura (pesci, fiori, etc.). Sono state estese recentemente a beni più costosi, come appartamenti, ed a oggetti molto più complessi, come licenze per la telefonia mobile di terza generazione. L'utilizzo del sistema delle aste risale all'antichità. Erodoto descrive il mercato

Una vendita all'asta di opere di artisti del XX secolo resso Christie's. Ogni potenziale acquirente in funzione di quel che personalmente crede sia il comportamento degli altri. La teoria dei giochi analizza tali situazioni ed aiuta a definire la strategia ottimale. (Negativo Gamma Liaison/Jonathan Elderfield)

del matrimonio di Babilonia come un'asta al primo premio (che significa che chi offre di più si aggiudica l'"oggetto" in vendita), che prendeva il via con le giovani donne più belle. In Asia, il più antico racconto d'aste riguarda la vendita degli effetti personali dei monaci deceduti, nel settimo secolo.

Le prime concettualizzazioni delle aste erano inadatte, perché troppo semplicistiche.

Se le aste risalgono quasi agli albori dell'umanità, la loro concettualizzazione è invece molto più recente. La prima opera accademica importante rivolta a questo soggetto è una tesi del 1955, l'autore della quale era l'americano L. Friedman. Si trattava di una delle prime tesi di ricerca operativa. Si basava sullo sviluppo di strategie d'asta da parte delle imprese in occasione della vendita dei diritti di trivellazione petrolifera nel Golfo del Messico. Erano aste "al primo premio in plico chiuso": in questa procedura, le offerte non sono rese pubbliche e l'offerta più alta vince l'asta.

Il modo di procedere adottato da Friedman consisteva semplicemente nel massimizzare quella che si chiama la speranza di profitto. In caso di successo, il giocatore d'aste guadagna la differenza $(v - b)$ tra la sua valutazione v dell'oggetto messo in vendita e il prezzo b che egli propone di pagare. La speranza di guadagno è dunque questa differenza moltiplicata per la probabilità $P(b)$ di vincere l'asta con un tal prezzo, $(v - b)P(b)$. La probabilità $P(b)$ è *a priori* non nota; ma realizzando un'analisi statistica delle aste passate, si scoprono i modi di giocare all'asta dei concorrenti; questo permette di determinare un'approssimazione della funzione $P(b)$; e talvolta di trovare il prezzo d'asta b^* che massimizza la speranza di guadagno, cioè tale che $(v - b^*)P(b^*)$ sia massimo.

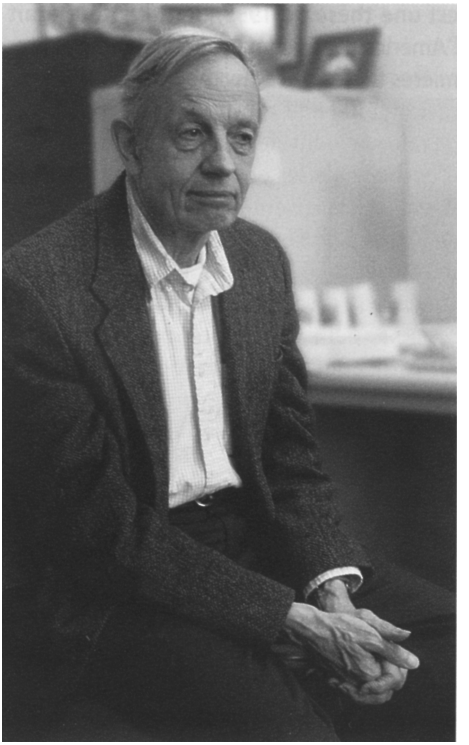
Questo metodo, largamente utilizzato e

La pagina principale del sito e Bay-France su Internet.

raffinato in diversi modi, è tuttavia estremamente intuitivo. In effetti, presuppone semplicemente che gli altri giocatori non elaborino strategie e che il loro comportamento futuro possa essere facilmente dedotto dal quello passato. Nel 1961, il Canadese William Vickrey (che ha ricevuto il premio Nobel per l'economia nel 1996, due giorni prima della sua morte) ha posto il problema in modo diverso, facendo appello alla teoria dei giochi.

La teoria dei giochi e l'economia matematica entrano in azione per definire delle strategie ottimali.

Creata dal celebre matematico di origine ungherese John von Neuman negli anni 1920-1940, in collaborazione con l'economista di origine austriaca Oskar Morgenstern, la teoria dei giochi esamina l'interazione di attori strategici. Riguarda una situazione complessa in cui ogni attore deve prendere delle decisioni che determinano l'esito della situazione stessa. La teoria dei giochi si applica quindi a numerosi scenari dell'universo economico, politico, diplomatico o militare. Ma torniamo alle nostre aste. Quando un giocatore deve decidere della sua offerta, s'interroga sul comportamento dei suoi concorrenti, ed ogni giocatore fa lo stesso. Un *equilibrio* di questa situazione indica, per gli specialisti, un oggetto assai complesso: è un metodo per fare un'offerta - detto diversamente è una relazione tra la valutazione v del giocatore e la sua offerta b - che per questo giocatore è il modo migliore di scommettere, tenuto conto del fatto che egli gioca d'anticipo sulle offerte degli altri attori e sulle opinioni che egli ha delle loro valutazioni. Per esempio, in una situazione simmetrica dove le opinioni degli uni sugli altri sono le stesse, la strategia di un giocatore deve massimizzare la sua speranza di profitto sapendo che tutti gli altri utilizzano la sua stessa strategia.



Il matematico americano John Forbes Nash, nato nel 1928, ha ricevuto il Premio Nobel per l'economia nel 1994, essenzialmente per i suoi lavori sulla teoria dei giochi. Verso i 30 anni, Nash ha iniziato a soffrire di disturbi mentali rilevanti, dai quali si è ripreso in modo spettacolare, negli anni '80. Peraltro la sua vita è stata oggetto del libro-biografia "Un uomo eccezionale" ed ha ispirato l'omonimo film. (Negativo Università di Princeton)

Il concetto che abbiamo appena richiamato è una generalizzazione dell'*equilibrio di Nash*, adattato al contesto di informazione incompleta delle aste. Di cosa si tratta? Il matematico americano John Nash (premio Nobel per l'economia nel 1994) aveva proposto verso il 1950 una nozione d'equilibrio molto naturale, che generalizzava quella data nel 1838 dal matematico ed economista francese Antoine Cournot. Date delle azioni che i giocatori possono scegliere, queste formano un *equilibrio di Nash* quando l'azione di ogni giocatore è la migliore possibile per sè, sapendo che gli altri giocatori ugualmente scelgono delle azioni specificate per l'equilibrio di Nash. In una situazione di equilibrio di Nash, nessuno ha interesse a cambiare unilateralmente la propria azione.

La difficoltà peculiare delle aste, è che ogni giocatore-compratore è il solo a conoscere la propria valutazione del bene in vendita, e che non conosce le valutazioni degli altri potenziali acquirenti. Bisogna dunque generalizzare il concetto di equilibrio di Nash a questa sutuazione, in cui l'informazione è incompleta. È ciò che ha fatto intuitivamente Vickrey nel 1961; l'americano d'origine ungherese John Hrsanyi l'ha reso più rigoroso verso il 1967-1968, cosa che è valsa anche a lui il premio Nobel, nel 1994. Si è dunque giunti all'*equilibrio di Nash bayesiano*, nozione d'equilibrio che permette di ideare una congettura sul modo in cui i giocatori d'asta razionali dovranno fare la loro offerta durante un'asta.

Nel contesto delle aste, una strategia è, dal punto di vista matematico, una funzione S che associa ad ogni valutazione di un giocatore la sua offerta corrispondente. In altri termini, per tutte le valutazioni particolari v, questa funzione deve specificare l'offerta $b^* = S(v)$ che massimizza la speranza di guadagno calcolata a partire dalle regole dell'asta e supponendo che gli altri giocatori utilizzino la stessa strategia. Questo significa, in un equilibrio di Nash bayesiano simmetrico, che se gli altri fanno l'offerta nello stesso modo, utilizzando la stessa strategia, questo modo di decidere l'offerta è ottimale. Perchè l'aggettivo bayesiano? Perchè il giocatore calcola una speranza di vincita a partire dalle opinioni che egli stesso ha sulle valutazioni degli altri (in probabilità e in statistica, il punto di vista bayesiano – da Thomas Bayes, matematico inglese del diciottesimo secolo – consiste nel valutare delle probabilità sulla base dell'informazione parziale disponibile e delle opinioni *a priori*).

Quando la teoria conferma ed estende l'interesse di metodi di vendita ideati intuitivamente...

Nell'ambito delle aste, la matematica ha dunque permesso di modellizzare il comportamento degli attori, cosa che conduce ad una predizione sul loro modo di giocare. Questo ha permesso di fare progressi in due direzioni. Sul piano della conoscenza positiva, è diventato possibile confrontare i dati, cioè le offerte dei giocatori in differenti tipi d'aste, con ciò che la teoria predice. La teoria acquista, da questo fatto, uno statuto scientifico: la si potrà rifiutare nel caso in cui si tro-

vassero dei dati che contraddicono le previsioni, la teoria è dunque refutabile.

Per quanto riguarda lo stabilire delle norme, le conseguenze sono state ancora più importanti. Nell'ambito delle ipotesi della teoria delle aste così costruita, si è potuto dimostrare un teorema ricco di fascino: il *teorema dell'equivalenza dell'introito*. Senza entrare nei dettagli, questo teorema prova che le procedure d'asta al primo o al secondo premio (il compratore che vince il lotto non paga che il secondo prezzo proposto) in plico chiuso, le aste crescenti (inglesi) o decrescenti (olandesi), sono equivalenti per il venditore ed esse, inoltre, sono spesso ottimali. Così, i metodi di vendita utilizzati nella prassi, in casi particolari si rivelano essere, alla luce della teoria, il modo ottimale di assegnare delle risorse rare. Da cui un entusiasmo nuovo per l'estensione di questi metodi a tutti i tipi d'attività economiche. Infine, in circostanze più complesse che la vendita di un solo oggetto, la teoria permette di ideare generalizzazioni delle semplici aste per migliorare ulteriormente sia il guadagno del venditore che il benessere sociale, se l'organizzatore delle aste è uno Stato preoccupato di questo aspetto delle cose. Così è stato possibile comprendere, grazie alla matematica, il senso e l'interesse di una pratica ancestrale e, di conseguenza, trasformare questa intuizione umana in un vero strumento di sviluppo dell'economia.

Con Internet e le nuove tecnologie di comunicazione, le aste trovano un immenso campo di sperimentazioni. La rete Internet offre a questo sistema di vendita nuove possibilità, che la teoria aiuterà a valutare e a sviluppare. Per esempio, in una vendita all'asta, un venditore anonimo dovrà *a priori* subire l'asimmetria dell'informazione – lui solo conosce la qualità dei beni che vende – e non riesce ad ottenere che un prezzo di vendita molto scarso, ma attraverso delle vendite ripetute di oggetti di qualità *a priori* sconosciuta dai potenziali acquirenti, egli potrà poco a poco farsi una reputazione, grazie ai commenti che riporteranno i suoi precedenti compratori. La qualità delle aste potrà dunque essere migliorata creando un luogo dove possa essere costruita una reputazione di qualità e d'onestà, cosa a cui si presta agevolmente un sito Internet.

Jean-Jacques Laffont
Istituto di economia industriale,
Università di scienze sociali,
Manifacture des tabacs, Toulouse

Alcuni riferimenti bibliografici

- I. Ekeland, *La théorie des jeux et ses applications à l'économie mathématique* (P.U.F., 1974)
- A. Cournot (1838), *Recherche sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (Calmann-Lévy, Paris, rééd. 1974).
- J. Crémer et J.-J. Laffont, "Téléphonie mobile", *Commentaire, 93*, 81-92 (2001).
- L. Friedman, "A Competitive bidding strategy", *Operations Research, 4*, 104-112 (1956).
- J. Harsanyi, "Games with incomplete information played by bayesian players", *Management Scienze, 14*, 159-182, 320-134, 486-502 (1967-1968).
- J.-J. Laffont, "Game theory and empirical economics: the case of auction data", *European Economic Review, 41*, 1-35 (1997).

L'econometria per vendere vini ed obbligazioni

Philippe Février e Michael Visser

I grandi vini e i buoni del Tesoro sono oggetto di varie aste. Ma in che modo vanno fatte le offerte? Per saperlo bisogna descrivere completamente, attraverso degli studi econometrici, la modellizzazione generale dell'andamento delle aste.

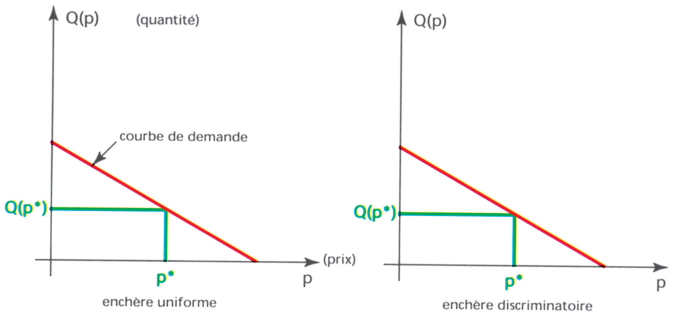
Nelle sale di vendita di Richelieu-Drouot, le aste di vini avvengono mediante offerte crescenti, dette *offerte all'inglese*. In questo tipo di procedura, il battitore d'asta dichiara un prezzo di partenza che viene poi progressivamente incrementato dalle offerte dei potenziali acquirenti fino a quando non ne rimane che uno, avendo abbandonato tutti gli altri. L'oggetto in vendita è quindi acquistato da quest'ultimo al prezzo dell'ultima offerta. Poichè devono essere messi all'asta diversi lotti di vino dello stesso tipo, un meccanismo detto *opzione*

Una vendita d'asta (all'incanto) di vini agli ospizi di Beaune, in Borgogna. Alcune analisi econometriche indicano che il ricorso alle opzioni di acquisto permette d'aumentare il ricavo del banditore.(Negativo Gamma/Alexis Orand)

di acquisto permette al vincitore di un lotto in un'asta di decidere quanti lotti vuole acquistare allo stesso prezzo (se non c'è l'opzione di acquisto, i lotti sono messi nuovamente all'asta). Consideriamo, per esempio, il caso dell'asta di due lotti identici di sei bottiglie di Mouton-Rotschild del '45. Terminata l'asta per il primo lotto, il banditore propone al vincitore l'acquisto dell'altro lotto allo stesso prezzo di quello già vinto. Se il vincitore esercita tale opzione, non c'è più alcun lotto da vendere perchè entrambi sono stati assegnati. Se invece il vincitore del primo lotto rinuncia a questa possibilità si procede all'asta per il secondo lotto.
L'opzione di acquisto da una parte permette di accelerare le vendite, dall'altra ha una componente strategica. Si nota, infatti, che gli acquirenti non si comportano nello stesso modo con o senza l'opzione di acquisto: potendola esercitare, la vittoria del primo lotto consente all'acquirente di ottenere potenzialmente anche tutti gli altri dello stesso tipo. Qual è dunque la componente strategica dell'opzione di acquisto? La possibilità dell'opzione di acquisto spinge i venditori a vendere di più e quindi aumentare il ricavo della vendita?

Lo stato dovrebbe utilizzare il sistema uniforme o quello discriminatorio

Lo stato francese finanzia il suo debito emettendo delle obbligazioni chiamate buoni del Tesoro. L'attribuzione di queste obbligazioni si stabilisce con l'aiuto di una procedura di offerta detta *discriminatoria*. Ciascun offerente, chiamato specialista di valore del Tesoro o SVT, stabilisce un insieme di coppie prezzo-quantità $(p, Q(p))$ nelle quali si associa, a ciascun prezzo p di un buono del Tesoro, la



In un'asta uniforme di buoni del Tesoro il gestore paga la somma $p^*Q(p^*)$ (area della superficie indicata nel grafico a sinistra), in cui p^* è il prezzo di equilibrio di un "buono", determinato in funzione della richiesta di tutti gli offerenti, e $Q(p^*)$ la quantità di buoni richiesti all'inizio dell'offerente a questo prezzo. In un'offerta discriminatoria, l'offerente paga un prezzo più alto di $p^*Q(p^*)$, corrispondente all'area indicata nel grafico di destra. Le strategie degli offerenti non sono più le stesse in questi due tipi di offerte.

quantità $Q(p)$ di buoni che si vorrebbe acquistare. Avendo lo stato precedentemente dichiarato la quantità totale T di obbligazioni che vuole emettere, la domanda associata (ovvero la somma delle domande di ciascun offerente) determina un prezzo p^* detto di equilibrio: è il prezzo tale che $T = Q_1(p^*) + Q_2(p^*) + \ldots + Q_N(p^*)$, dove $Q_i(p)$ è la quantità di buoni di costo p desiderata dall'i-esimo SVT. Quest'ultimo quindi ottiene la quantità di buoni $Q_i(p^*)$ che ha chiesto.

Se il prezzo che ciascun offerente pagherà per una obbligazione sarà esattamente p^*, il sistema di offerte sarà detto *uniforme* ed il costo totale per l'offerente sarà semplicemente $p^* Q(p^*)$, cioè il prezzo di un buono moltiplicato per il numero di buoni richiesti (è l'area del rettangolo tratteggiato nel grafico di sinistra). Nella discriminatoria, invece, che è quella adottata dallo stato, il prezzo pagato per ciascuna obbligazione non è p^* ma un po' di più. In effetti, lo stato fa pagare a ciascun offerente il massimo che è disposto a pagare per ogni ulteriore obbligazione; il costo totale per l'offerente è rappresentato dall'area del trapezio tratteggiato nel grafico di destra.

Spieghiamo meglio tutto ciò utilizzando un esempio di un offerente in cui la curva di domanda è la seguente: egli richiede 10 obbligazioni se il prezzo è di 90 euro, 9 obbligazioni se il prezzo è 100 euro, ..., 1 obbligazione se il prezzo è di 180 euro. Supponendo che il prezzo di equilibrio p^* sia 130 euro, questo offerente otterrà 6 obbligazioni. In un procedura discriminatoria, il prezzo che pagherà sarà il massimo che egli è disposto a pagare per le 6 obbligazioni, ovvero 180 euro per la prima, 170 euro per la seconda, ..., 130 euro per la sesta, per un totale di 930 euro. Utilizzando la procedura uniforme, invece, questo offerente dovrà pagare 130 euro per ciascuna delle 6 obbligazioni, per un totale di 780 euro.

Evidentemente gli SVT non si comportano nello stesso modo nelle due modalità di offerta ed il paragone tra i due sistemi non è per nulla immediato. Il Messico ha cambiato la procedura di offerta delle proprie obbligazioni nel 1990 passando al metodo della discriminatoria. Al contrario, gli Stati Uniti d'America hanno abbandonato nel 1998 il sistema discriminatorio a favore di quello uniforme. La procedura di offerta uniforme è la più redditizia per lo stato? Anche la Francia dovrebbe cambiare il proprio sistema di assegnazione dei buoni del Tesoro?

Come confrontare due situazioni quando non è possibile realizzare che una sola di esse?

Le risposte a domande di questo tipo, riguardanti l'utilizzo della opzione di acquisto per i lotti d'asta di vini o la procedura discriminatoria per l'assegnazione delle obbligazioni, sono molto importanti. I capitali in gioco possono essere considerevoli: 185 miliardi di euro nell'anno 2000 per l'assegnazione dei buoni del Tesoro e diverse decine di milioni per le aste di vini di Drouot. Come si risolvono problemi di questo tipo? Il metodo più efficace consiste

nella sperimentazione effettiva. In tal modo, per le offerte all'asta di buoni del Tesoro, bisognerebbe utilizzare contemporaneamente i due modelli di offerta diversi e poi confrontare i risultati ottenuti. La stessa cosa andrebbe fatta per le vendite di vini all'asta: bisognerebbe organizzare contemporaneamente aste con opzione di acquisto e aste in cui non vi sia questa possibilità al fine di confrontare i comportamenti degli offerenti. Malauguratamente questi esperimenti sono praticamente impossibili. Quindi siamo di fronte al seguente problema: confrontare due situazioni avendo *a priori* informazioni su una sola di esse.

Per trovare la soluzione al nostro problema è necessario un passo matematico piuttosto complesso. In un primo tempo bisogna modellizzare il comportamento degli offerenti, che sono caratterizzati dal prezzo massimo che sono disposti a pagare per ottenere un dato oggetto in vendita; tale prezzo è detto valutazione. In questo modello ciascun giocatore conosce la propria valutazione ma ignora quella degli altri. Egli non può fare altro che una previsione a priori dei possibili valori delle valutazioni dei suoi avversari e questa situazione può essere rappresentata da una funzione f che specifica quale grado di probabilità è assegnato ai diversi valori: $f(v)$ è la probabilità che l'offerente attribuisca il valore v all'oggetto in vendita. La strategia di offerta ottimale, vale a dire il prezzo che deve essere proposto dall'offerente in virtù della propria valutazione, si ottiene mediante la ricerca dell'equilibrio bayesiano di Nash (vedere il precedente articolo di Jean-Jacques Laffont).

Quindi si può modellizzare e confrontare, da un punto di vista puramente teorico, le due situazioni concrete che vogliamo analizzare. Il confronto dipenderà chiaramente dalla funzione f scelta nel modello. Se una delle due situazioni prevale sull'altra per qualsiasi funzione f (per esempio, la vendita discriminatoria permette allo stato di avere un guadagno maggiore di quella uniforme, qualunque siano le convinzioni degli SVT, definite mediante la funzione f) è possibile trovare una soluzione conclusiva. In generale, le situazioni analizzate sono troppo complesse perchè sia chiara la predominanza di una di esse. Quindi, a questo livello, se la f è fatta in un determinato modo otteniamo conclusioni in corrispondenza alle quali Drouot ha interesse a mantenere l'opzione di acquisto, ma se la funzione è un'altra, l'opzione di acquisto potrebbe non essere più conveniente. Quindi il problema si riconduce alla conoscenza effettiva della funzione f.

La funzione f è determinata mediante il confronto tra le previsioni teoriche ed i fatti reali. In effetti, una volta scelta la funzione f, il modello e le strategie di equilibrio sono determinate a partire dal tipo di comportamento che noi affermiamo abbiano i giocatori all'interno dell'asta. È quindi sufficiente confrontare queste previsioni - calcolabili grazie ad aver operato una scelta per f - con i dati reali. Se coincidono, allora la funzione f è stata scelta opportunamente; altrimenti bisogna ripartire da capo utilizzando un'altra funzione.

Due tipi di metodi econometrici per determinare le probabilità associate alle valutazioni degli offerenti

In pratica è impossibile provare una dopo l'altra tutte le funzioni f immaginabili: sono un numero infinito! Per determinare f si fa appello a metodi detti *econometrici*. Questi si possono raggruppare in due grandi categorie: i metodi parametrici (nei quali si suppone che la funzione f sia completamente caratterizzata da un certo numero di parametri incogniti) ed i metodi non parametrici (che non fanno alcuna ipotesi *a priori* su f). Questi ultimi, più generali ma anche più complicati, sono stati sviluppati a partire dalla fine degli anni '50, tuttavia solo di recente i ricercatori sono riusciti ad adattarli al problema di stimare la nostra funzione f. Una volta stabilita tale funzione (o, equivalentemente, i valori dei parametri che definiscono f nel caso di metodi parametrici) è sufficiente confrontare le due situazioni considerate per sapere quale delle due prevale sull'altra, cioè quale sia la più vantaggiosa dal punto di vista del venditore.

Opzione d'acquisto, offerta discriminatoria: i modelli mostrano che questi sistemi sono vantaggiosi per il venditore

Questo è il passo che ci permette di rispondere alle domande poste all'inizio di questo articolo riguardo all'utilizzo dell'opzione di acquisto nelle aste di vini presso Drouot. In un primo tempo, abbiamo sviluppato due modelli teorici, uno con l'opzione di acquisto e l'altro senza, ed abbiamo calcolato l'equilibrio bayesiano in ognuna delle due situazioni. Quindi, abbiamo fatto riferimento a Drouot per ottenere dei dati (prezzi di vendita di vini, caratteristiche di questi vini, ecc.); infine abbiamo applicato un metodo di stima parametrica al nostro modello teorico avente l'opzione d'acquisto. È importante osservare che i vini sono tutti diversi tra loro (annata, colore, vitigno, livello, etichetta, ecc.) e bisogna procedere ad una stima della funzione f per ciascuna categoria di vino. Una volta fatto questo, il modello teorico senza l'opzione d'acquisto ci permette di calcolare il guadagno che il banditore d'asta avrebbe realizzato se non avesse utilizzato l'opzione d'acquisto. Le prime conclusioni di questo studio sono che l'utilizzo dell'opzione d'acquisto permetterebbe al banditore di aumentare il proprio guadagno del 7% rispetto al caso di una situazione senza questa possibilità.

A partire dai dati sulle vendite dei buoni del Tesoro francesi nel 1995, abbiamo seguito lo stesso tipo di procedimento per confrontare i due modi di assegnazione precedentemente descritti (offerta uniforme ed offerta discriminatoria). I risultati di questo lavoro mostrano che con la procedura discriminatoria il guadagno dello stato è superiore del 5% rispetto a quello che sarebbe stato ottenuto con il sistema uniforme. Quindi, in questo problema così come nel problema delle aste di lotti

di vini, i modelli econometrici elaborati danno delle risposte a domande a cui sembrerebbe impossibile rispondere a causa della mancanza di dati per confrontare, e scegliere, una delle due possibili situazioni.

Philippe Février e Michael Visser
CREST-LEI (Centro di Ricerca in Economia e Statistica - Laboratorio d'Economia Industriale, Parigi)
INSEE (Instituto Nazionale di Statistica e di studi Economici)

Alcuni riferimenti bibliografici:

- C. Gouriéroux e A. Monfort, *Statistique et modèles ècomètriques* (Economica 1989)
- P. Février, W. Ross e M. Visser, "*Etude théorique et empirique de l'option d'achat dans les enchères anglaises*", Document de travail du CREST (2001)
- J. J. Laffont, H. Ossard e Q. Vuong, "*Econometrics of first price auctions*", Econometrica, 63 pp. 953 - 980 (1995)
- S. Donald e H. Paarsch, "*Piecewise pseudo-maximum likelihood estimation in empirical models of auctions*", International Economic Rewiew, 34 pp. 121 - 148 (1993)
- P. Février, R. Préger e M. Visser, "*Econometrics of Share Auctions*", Document du travail du CREST (2001)
- E. Guerre, I. Perrigne e Q. Vuong, "*Optimal nonparametric estimation of first price auctions*", Econometrica 68 pp. 525 - 574 (2000)
- W. Härdle, *Applied nonparametric regression* (Cambridge University Press, 1990)

Il rompicapo delle compagnie aeree

Jean Christophe Culioli

I problemi di organizzazione e di pianificazione di una compagnia aerea sono analoghi a quelli che si incontrano in altre attività. La ricerca operativa, campo che comprende decine di migliaia di matematici ed ingegneri, si occupa di risolvere questo tipo di problemi nel modo migliore.

Il trasporto aereo è un'attività complessa. In esso entrano in gioco grandi investimenti (aerei ed infrastrutture di manutenzione), personale altamente qualificato (piloti e personale addetto al volo) ed informazioni precise a tempo reale (sistemi di prenotazione e di gestione). In questo settore poi la concorrenza è spietata e le tariffe non sempre riflettono esattamente i costi di produzione. Per essere contemporaneamente competitiva e sicura, una compagnia aerea deve quindi stabilire un giusto prezzo.

Per fare ciò bisogna utilizzare delle tecniche di ottimizzazione specifiche per ciascun livello della produzione. Tutte queste tecniche sono raggruppate nella disciplina matematica che porta il nome di *ricerca operativa*. Questo settore della matematica è sorto durante la seconda guerra mondiale per soddisfare alle necessità militari anglo-sassoni, con l'avvento dei calcolatori ha dato origine ai metodi della programmazione lineare. La ricerca operativa si è molto sviluppata ed è largamente penetrata nel mondo dell'impresa e dell'industria. Per questo motivo i metodi inventati sono spesso strettamente riservati.

La ricerca operativa si occupa di risolvere problemi relativi al tempo, asse-

Per utilizzare al meglio la propria flotta, una compagnia aerea deve stabilire con cura i suoi programmi di manutenzione e i suoi programmi di volo, pianificare il lavoro del personale a terra e ruotare gli equipaggi, ecc. Sono problemi non facili di ricerca operativa, che fanno intervenire equazioni con migliaia di incognite. (Negativo Air France)

gnazione di compiti, ordini di merce di fabbrica, etc..., problemi dove intervengono molteplici variabili e vincoli per i quali la soluzione deve essere la migliore possibile, nel senso di un costo ottimale, di un minor spreco di tempo, o in qualche altro senso. Un esempio elementare di ricerca operativa è quello di assegnare, all'interno di una impresa che fornisce 50 posti di lavoro, un incarico determinato a ciascuno dei 50 impiegati, sfruttando al meglio le attitudini di ognuno di loro. Per ottenere la miglior soluzione di questo problema bisognerebbe passare in rassegna tutte le possibilità, valutare ciascuna di esse con attenzione ed infine scegliere la più vantaggiosa. Fare questo è impossibile in pratica: bisognerebbe esplorare $50! = 50 \times 49 \times \cdot \times 3 \times 2 \times 1$ possibilità, un numero gigantesco (circa uguale a 3×10^{64}). Se un computer fosse in grado di esaminare un miliardo di possibilità al secondo, servirebbero 10^{48} anni per esaminarle tutte, cioè più anni di quanti ne abbia l'intero Universo (circa 10^{10})!

Questo esempio lascia intravedere l'ingegnosità dei metodi della ricerca operativa che permettono di ricondurre il tempo di soluzione di problemi così realistici entro limiti accettabili. Inoltre, nel costruire questi metodi, la ricerca operative attinge agli strumenti informatici ed a diversi settori della matematica (algebra, probabilità, analisi numerica, etc...). Sebbene essa abbia già più di cin-

La programmazione lineare

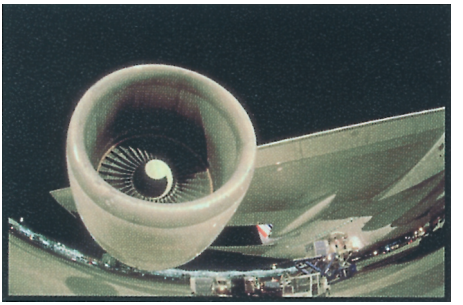
La programmazione lineare è il problema matematico che consiste nel determinare delle quantità positive $x_1, x_2, \ldots, x_N$ che minimizzano un certo "costo", supposto uguale a $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N$, dove $c_1, c_2, \ldots, c_N$ sono dei valori conosciuti e le x_i sono legate tra loro da vincoli che si esprimono sotto forma di equazioni lineari (della forma $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_N x_N = B$, essendo A_i e B numeri conosciuti dipendenti dal problema posto). Numerosi problemi di ricerca operativa si possono formulare in questi termini. Anche se l'enunciato di un problema di programmazione lineare è relativamente semplice, la sua risoluzione non lo è affatto, poichè il numero N delle incognite che devono essere determinate, nei casi pratici, è di diverse migliaia. Questo problema apparentemente banale è tuttavia di primaria importanza per le applicazioni ed è all'origine di ricerche di ottimizzazione tra le più fruttuose degli ultimi trent'anni. Nel 1947, il matematico americano George Dantzig propose l'eccellente algoritmo detto del simplesso che è ancora frequentemente utilizzato. Negli anni '70 e '80 sono nati altri algoritmi del medesimo stile. L'anno 1984 ha segnato un punto di svolta: un giovane matematico che lavorava negli Stati Uniti, Narendra Karmarkar, ha scoperto un algoritmo di programmazione lineare particolarmente efficace (a convergenza polinomiale). Le idee che stavano alla base di tale metodo hanno inaugurato un filone di ricerca molto attivo (metodi dei punti interni), che ha mobilitato simultaneamente migliaia di matematici in tutto il mondo. Grazie a questo sforzo, ora l'industria può disporre di una vasta gamma di algoritmi di programmazione lineare molto efficaci.

quanta anni, la ricerca operativa è una scienza matematica ancora giovane: in genere non passano più di tre anni da quando un metodo è studiato e concluso in un laboratorio di ricerca a quando esso è effettivamente messo in pratica, dopo essere stato vagliato da una commissione di studio. Nel settore delle compagnie aeree, la posta in gioco è talmente alta che sono nate numerose società di consulenza e di servizi matematici ed informatici come il gruppo *Sabre*, sezione di ricerca operativa della compagnia American Airlines, la società *Adopt*, che fa parte dei laboratori *Gerad* (Gruppo di Studi e di Ricerca in Analisi delle Decisioni) dell'università di Montréal, o delle società francesi come *Eurodecision*, *Ilog* o *Cosytech*.

Ottimizzare il programma dei voli, assegnare un aereo a ciascun volo, minimizzare i tempi di immobilità

Per utilizzare al meglio la propria flotta di veivoli, primaria ricchezza di una compagnia aerea, bisogna cominciare stabilendo un programma di manutenzione ottimale, cioè posizionare al meglio, nel corso del tempo, le revisioni tecniche grandi e piccole che deve subire ciascun aereo. Un aereo a terra non fornisce alcun guadagno, dunque bisogna minimizzare i tempi di immobilità di ciascun veivolo, tenendo conto degli orari e della qualifica degli operatori di volo, della disponibilità degli hangars,etc... Le equazioni in cui tale problema è tradotto matematicamente non sono lineari. Esse presentano quindi ulteriori difficoltà, ma si dispone di metodi sufficientemente efficaci per trattarle.

Una volta stabilito il programma di manutenzione (su un orizzonte temporale che varia da 6 mesi a 10 anni), il passo successivo è di programmare una tabella di volo ottimale. Dopo aver costruito una rete - una lista di percorsi che devono essere effettuati con orari prefissati in funzione delle previsioni di mercato e degli spazi attribuiti a ciascuna compagnia dall'IATA (International Airline Transportation Association) - bisogna determinare quale tipo di aereo (ad esempio, Airbus 340) sia il più adatto, tecnicamente ed economicamente, per effettuare ciascuno dei voli prestabiliti. Gli elementi che intervengono nel programma di ottimizzazione sono le caratteristiche degli aerei (capacità e prestazioni), la previsione del numero di passeggeri, etc... L'elaborazione di un programma di voli necessita di tecniche



Le compagnie aeree cercano di ridurre il più possibile i tempi di fermata a terra dei loro apparecchi, tenendo conto di molteplici vincoli, quando è a terra l'apparecchio non produce alcun reddito. (Negativo Air France)

di ottimizzazione che facciano appello alla statistica ed alla probabilità così come ad algoritmi di programmazione lineare a numeri interi (cioè dove le incognite rappresentano numeri interi).

Si tratta di stabilire come collegare i voli e le operazioni di manutenzione di ciascun aereo e come gestire tutto l'insieme dei vincoli operativi (regole di manutenzione, successioni autorizzate o non autorizzate) in modo da minimizzare le conseguenze di eventuali problemi tecnici, ritardi imprevisti,etc... Questo problema di ottimizzazione, conosciuto come *construzione della rotazione degli aerei*, è modellizzato da un programma lineare a numeri interi di grandi dimensioni. Per risolverlo esattamente è quindi necessario applicare una tecnica di decomposizione (la *generazione di colonne* o il *rilassamento lagrangiano*), al fine di semplificare il problema.

Infine, per ciascuna rotazione di aerei, bisogna determinare esattamente il veivolo che sarà utilizzato, in funzione dei vincoli di manutenzione di ciascun aereo (numero di ore di volo, numero di cicli atterraggio/decollo prima del controllo, etc...). Questa *immatricolazione* è generalmente realizzata grazie a tecniche di "programmazione dinamica". Introdotta dall'americano Richard Bellman negli anni '50, questo tipo di ricerca consiste nel decomporre il problema decisionale iniziale in diversi problemi più semplici che possono essere risolti uno dopo l'altro (la programmazione dinamica si può anche applicare al calcolo delle traiettorie ottimali di un aereo per determinare le strategie di investimento più opportune).

Il problema della pianificazione appare in molteplici forme, così pure la matematica che ne sta alla base

Ciascun aereo deve avere un programma di volo preciso e prestabilito; si può quindi tentare di massimizzare i guadagni attivando o chiudendo le classi di prenotazione secondo la domanda effettiva della clientela. Questo problema è un problema classico nel settore dei viaggi aerei e del trasporto ferroviario di passeggeri, così come lo è per i noleggiatori di autovetture e le catene di alberghi. Si esprime come un problema di ottimizzazione stocastica: bisogna massimizzare un guadagno F in funzione delle probabilità, vale a dire massimizzare la speranza matematica del guadagno F, sapendo che F dipende da variabili aleatorie x_i (x_i può rappresentare, per esempio, il numero di posti effettivamente occupati per ogni classe con dei vincoli della forma $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdot + + A_N x_N = B$, dove B rappresenta la capacità).

A tutte le osservazioni precedenti bisogna aggiungere la pianificazione del personale di terra (taglio degli effettivi, sincronizzazione tra i programmi di volo, programmazione del prezzo a carico dei passeggeri in corrispondenza al loro bagaglio, etc...) e di quello di volo, tenendo conto dei regolamenti di viaggio e delle norme di sicurezza. Come si può notare l'attività di una compagnia aerea pone un gran numero di problemi di ottimizzazione, che sono spesso simili a quelli del trasporto ferroviario o marittimo. Questi

problemi sono difficili: matematicamente corrispondono alla massimizzazione o minimizzazione di quantità dipendenti da un gran numero di variabili (diverse migliaia o addirittura di più).

Jean-Christophe Culioli
Direttore della ricerca operativa, Air France

Alcuni riferimenti bibliografici:

- Y. Nobert, R. Ouellet et R. Parent, *La recherche opérationnelle* (3° éd., Gaëtan Morin, 2001).
- R. Faure, B. Lemaire et C. Picouleau, *Précis de recherche opérationnelle* (5° éd., Dunod, 2000).
- "*AirWorthy OR*" dans Operational Research and Management Science Today, numéro de décembre 1999.
- Bulletins de la ROADEF (Association pour la Recherche Opérationnelle et l'Aide à la Décision en France, issue de la refondation de l'AFCET).

Geometria a 11 dimensioni per comprendere la Genesi?

Maurice Mashaal

I fisici aspirano da tempo a una teoria capace di comprendere tutte le particelle elementari e le loro interazioni. Da una quindicina d'anni, hanno una pista seria. Ma per esplorarla, devono navigare in spazi davvero astratti dove nemmeno gli stessi matematici si erano ancora avventurati.

Tutti gli uomini onesti sanno che gli scienziati come i fisici o i chimici utilizzano la matematica. Più rari sono coloro che sanno fino a che punto questo è vero, e quanto profonda è la connessione tra matematica e scienze naturali. Lo sviluppo della scienza moderna, e più in particolare quello della fisica, sembra confermare pienamente quest'idea. C'è ben più di una conferma: molto pensatori si stupiscono di constatare che le invenzioni o le scoperte matematiche hanno sempre finito per essere la descrizione di qualche aspetto di fenomeni naturali. È lo stupore davanti alla famosa "irrazionale efficacia della matematica nelle scienze della natura" di cui parlava il fisico d'origine ungherese Eugene P. Wigner (1902-1995).

Non si sa veramente perchè la matematica sia così "efficace". È una questione ancora aperta, che riguarda la filosofia della conoscenza. Non si cercherà qui di rispondere, ma solamente di illustrare questa efficacia nell'ambito della fisica più teorica e più estrema, quella che non ha *a priori* alcuna utilità materiale – dalla quale però sono conseguite delle invenzioni cruciali come il laser, il transistor o l'energia nucleare...

Fisica e matematica, una lunga storia di contributi reciproci

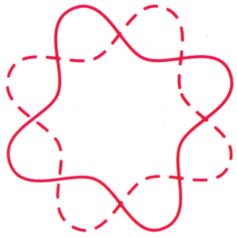
I legami tra la matematica e la fisica non risalgono ad oggi. Il principio d'Archimede ("tutti i corpi immersi in un liquido subiscono una spinta pari al peso del volume del liquido spostato") non costituisce un enunciato matematico che poggia su un fenomeno fisico? La fisica non ha conosciuto dei progressi spettacolari grazie alla creazione del calcolo differenziale e integrale da parte di Newton e di Leibnitz nel diciassettesimo secolo? Inoltre, questi legami non

Una miriade di galassie molto lontane viste dal telescopio spaziale Hubble. Poiché la gravitazione è un elemento chiave della nascita e dell'evoluzione dell'Universo, gli specialisti gradirebbero di poter, prima o poi, avere a disposizione una descrizione della forza di gravitazione compatibile con i principi della fisica quantistica. Riuscirà la teoria delle stringhe ad esaudire questo loro desiderio? (Negativo R. Williams/HDF (STSci) / NASA)

sono sempre a senso unico, uno strumento matematico dapprima viene inventato e poi applicato ad un problema di fisica. Un esempio tra gli altri a testimone: è interessandosi al problema della propagazione del calore che il matematico francese Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) ha ideato le "serie di Fourier" (si tratta di somme infinite di funzioni trigonometriche), che hanno da allora un ruolo estremamente importante nelle scienze e nella tecnica.

La fisica del ventesimo secolo è ricca di interazioni con la matematica. È questo il caso delle due grandi teorie nate all'inizio del secolo, la teoria della relatività di Einstein e la meccanica quantistica. La relatività (generale) di Einstein è una teoria della gravitazione che sostituisce quella di Newton; essa si fonda su concetti radicalmente differenti, legati alle geometrie non euclidee, introdotte nel diciannovesimo secolo, quando nessuno supponeva che tale matematica potesse avere un qualsivoglia rapporto con la realtà. Lo stesso,

quando i matematici hanno cominciato a studiare gli "spazi di Hilbert" (spazi astratti in cui i punti possono essere – per esempio – delle funzioni che verificano certe condizioni tecniche), all'inizio del 1900, nessuno immaginava che una ventina d'anni più tardi gli spazi di Hilbert sarebbero stati la cornice adeguata per formulare le leggi della meccanica quantistica (che si manifestano soprattutto in scala atomica e subatomica). Reciprocamente, le ricerche fondamentali sulla relatività generale o sulla maccanica quantistica hanno a loro volta stimolato ricerche puramente matematiche.



Una corda chiusa vibra in modo da presentare un numero intero di sommità e di cavità. Le diverse particelle subatomiche (elettroni, fotoni, ecc...) potranno corrispondere ai diversi modi di vibrazione di minuscole corde fondamentali.

La fisica delle particelle elementari, ambito in cui si impiega della matematica molto astratta

Guardiamo un pò più da vicino una delle direzioni in cui si è sviluppata la meccanica quantistica: lo studio di particelle dette elementari e delle loro interazioni. Nel corso dei decenni 1930-1950, è stata elaborata una cornice teorica di grande complessità, tanto dal punto di vista dei concetti quanto delle tecniche matematiche messe in opera, chiamata *teoria quantistica dei campi*. È all'interno di questa cornice, e per aver messo in evidenza nuove particelle grazie agli acceleratori di particelle, che i fisici hanno scoperto che il mondo delle particelle elementari manifesta un certo numero di simmetrie. La *teoria dei gruppi*, un'importante branca della matematica fondata nel diciannovesimo secolo, ha avuto e continua ad avere un ruolo fondamentale nell'evidenziare questa simmetria (per lo più astratta). È grazie a questa teoria che, a più riprese, i teorici hanno potuto predire l'esistenza di certe particelle, qualche anno prima che fossero scoperte da coloro che facevano esperimenti.

Negli anni 1970-1980, la teoria delle particelle elementari era giunta ad un punto in cui era capace di descrivere in modo soddisfacente e globale tutte le particelle conosciute e quasi tutte le loro interazioni. Perchè "quasi"? Si conoscono quattro interazioni fondamentali – la forza di gravità, la forza elettromagnetica e due forze agenti su scala nucleare, l'interazione debole e l'interazione forte; ora, é noto che i fisici non sono riusciti a far rientrare la forza gravitazionale nella loro teoria, chiamata il *Modello standard* della fisica delle particelle.

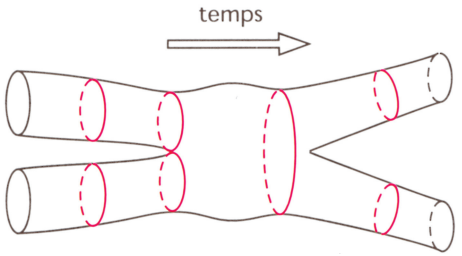
Conciliare la gravitazione con la fisica quantistica, una sfida che pare alla portata delle teorie delle stringhe

Cosa significa questa eccezione? La gravitazione sembra descritta correttamente dalla relatività generale di Einstein, ma la teoria di Einstein non è una teoria quantistica, cioè non integra i principi (abbastanza strani, sia detto per inciso) della fisica quantistica. Ora, non si vede affatto perchè, se tutta la natura segue leggi quantistiche, la gravitazione ne sarebbe esonerata. Da cui l'ostinazione dei fisici a fare rientrare la gravitazione nell'ovile quantistico. Malgrado più decenni di sforzi, non ci sono ancora riusciti.

Eppure, dalla metà degli anni '80, molti fra loro credono di essere a buon punto. In effetti, è a quest'epoca che una nuova teoria ancora incompleta ma promettente, chiamata *teoria delle stringhe*, ha guadagnato sufficiente coerenza perchè la si affronti seriamente. Il contesto esatto e le ragioni precise che hanno spinto i teorici in questa direzione sono davvero troppo tecnici perchè possano essere spiegati qui. È ugualmente impossibile spiegare in modo semplice in cosa consista la teoria delle stringhe. Diciamo appena, in modo molto approssimativo, che essa presuppone che gli oggetti fisici fondamentali non siano delle particelle assimilabili a punti ("filosofia" delle teorie quantistiche dei campi tradizionali), ma delle minuscole stringhe senza spessore – dei piccoli tratti di linea, in qualche modo; e che le diverse particelle osservate alla nostra scala corrisponderebbero ai differenti modi di vibrazione delle stringhe, un pò come le diverse vibrazioni di una corda di violino corrispondono alle diverse note musicali.

Perché le teorie delle stringhe siano coerenti, lo spazio-tempo deve possedere 11 dimensioni

Le *teorie delle stringhe* (*teorie* al plurale, poichè ne esistono infatti più versioni) sono ancora preliminari e di una complessità temibile. Diversi aspetti restano da decifrare. Inoltre, per il momento è impossibile sottoporle alla prova dell'esperienza, poichè le energie che richiederebbero sono del tutto inaccessibili, persino con i più potenti acceleratori di particelle di cui disponiamo. Ma queste teorie hanno sedotto i teorici, perchè integrano in modo naturale la gravitazione, apparentemente senza incontrare gli



Rappresentazione schematica della interazione fra due corde. Al variare del tempo, che va da sinistra a destra in questo disegno, una corda chiusa "spazza" una superficie della forma di un tubo.

Edward Witten, uno dei principali esperti della teoria delle stringhe. Non é chiaro se considerarlo come un fisico o come un matematico... (Negativo: DR)

ostacoli che si incontravano nelle teorie precedenti.

Se i fisici riuscissero a costruire una teoria delle stringhe completa e coerente, sarebbero in grado di studiare in modo preciso i fenomeni gravitazionali violenti (di energia molto elevata) che avvengono nel cosmo, come l'implosione di una grossa stella su sè stessa, la fisica dei "buchi neri", etc. Questi sono anche i misteri dei primi istanti della nascita dell'Universo – i primi istanti del famoso big bang – che si potrà meglio collocare nel tempo. Una descrizione quantistica della gravitazione permetterà certamente di fare un salto qualitativo e quantitativo nella comprensione dell'Universo, della sua origine e della sua evoluzione.

Ma come si è detto prima, le teorie delle stringhe sono molto complicate. Esse implicano delle tecniche matematiche elaborate, spesso obbiettivo delle più recenti ricerche. Infatti, gli specialisti di queste teorie comprendono indifferentemente fisici e matematici (diversi insigniti della medaglia Fields, il riconoscimento più alto in matematica, hanno dedicato una parte importante dei loro lavori alle teorie delle stringhe, è il caso dell'Americano Edward Witten, o del Russo trasferito in Francia Maxim Kontsevich). È stato in modo evidente stabilito che le teorie delle stringhe non possono essere coerenti se non si suppone che lo spazio-tempo possieda non quattro dimensioni (tre dimensioni per lo spazio, una per il tempo), ma molte di più: undici dimensioni secondo le ultime notizie! Le sette dimensioni supplementari, impercettibili ai nostri sensi poichè sarebbero avvolte su loro stesse in minuscoli gomitoli, contribuiscono all'astrazione e alla difficoltà. La necessità per i teorici di maneggiare stringhe e altri oggetti in spazi con un tal numero di dimensioni ha creato un formidabile terreno di collaborazione tra fisici e matematici. Le ricerche in questo campo hanno avuto intanto dei risvolti sia sulla teorie delle stringhe stesse sia su branche fondamentali della matematica. È un bell'esempio, nella storia della matematica e della fisica, di una relazione intima tra queste due di-

scipline, i risultati dell'una che sostengono le ricerche dell'altra. Il gioco vale la candela: sebbene le teorie delle stringhe siano ancora altamente speculative, non si tratta niente meno che di svelare i misteri dell'infinitamente piccolo e dell'infinitamente grande, e cioè, in definitiva, delle nostre origini.

Maurice Marshaal
giornalista scientifico

Alcuni riferimenti bibliografici

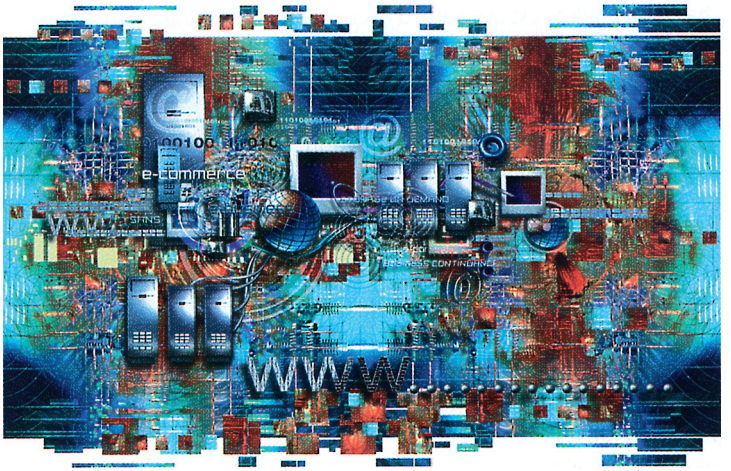
- B. Greene, *L'Univers élégant* (Robert Laffont, 2000).
- M. Duff, *Les nouvelles théories des cordes*, Pour la Science, aprile 1998.
- N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *Les dimensions cachées de l'Univers*, Pour la Science, ottobre 2000.
- I. Antoniadis, E. Cremmer et K. S. Stelle, *Les supercordes*, Gazette des mathématiciens n. 87, pp. 17-39, e n. 88, pp. 95-114 (gennaio e aprile 2001).
- P. Deligne e al. (eds.), *Quantum fields and strings: a course for mathematicians* (American Mathematical Society/ Institute for Advanced Study, 1999).

INTERNET: modellizzare il traffico per gestirlo meglio

François Baccelli

Gli esperti di reti di comunicazione si sforzano per comprendere bene le proprietà statistiche del traffico dei dati che devono inoltrare. La gestione e lo sviluppo di queste reti ne dipendono direttamente.

Le reti di comunicazione (telefono, internet, reti locali, etc.), hanno conosciuto, nel corso degli ultimi dieci anni, una espansione fenomenale. Per i loro operatori, una questione centrale è saper controllare i flussi di informazione in modo ottimale, al fine di evitare ingorghi ed offrire agli utenti un servizio di buona qualità, affidabile e rapido. Per concepire procedure efficienti di controllo della circolazione delle informazioni, per stabilire correttamente la dimensione i



La rete Internet non è centralizzata nel modo in cui lo erano nel passato le reti di comunicazione. Da tale cambiamento strutturale si hanno ripercussioni profonde sulle proprietà matematiche del traffico dei dati di informazione (Foto: Getty Images)

programmi e le attrezzature materiali necessari, è indispensabile una conoscenza approfondita delle proprietà dei traffici delle comunicazioni in tali reti. L'analisi matematica dei traffico nelle reti di comunicazine è una disciplina che ha molti anni. Essa risale al 1917, con i lavori dell'ingegnere danese Agner K. Erlang. Il suo sviluppo, perseguito da molti altri ricercatori, ha fornito i principali strumenti matematici di dimensionamento utilizzati dagli utenti e dai costruttori di reti, fino a circa gli anni novanta.

Fino agli anni novanta è sufficiente la modellizzazione del traffico attraverso le leggi statistiche classiche.

Agli inizi, la ricerca matematica esplorata da Erlang e dagli altri ricercatori ed ingegneri dopo di lui è *marcoviana*. Questo significa che descrive il traffico appogginadosi sul modello semplice dei processi aleatori, le *catene di Marcov*, per le quali la teoria matematica è molto avanzata e potente (Andreï Marcov (1856-1922) era un matematico russo che ha apportato dei contributi importanti alla teoria della probabilità). Semplificando, una catena di Marcov è una sequenza di eventi aleatori, nei quali la probalitità di un evento dato dipende solo dall'evento immediatamente precedente. Nel quadro delle reti di comunicazione, la strada marcoviana di Erlag suppone che le leggi statistiche che caratterizzano il traffico sono le leggi di Poisson; la legge di Poisson è una delle leggi di probabilità o di statistica più diffuse e più semplici e deriva il suo nome dal matematico francese Denis Poisson (1781-1840). L'ipotesi di Poisson potrebbe essere ben rappresentata nel caso del traffico telefonico (dove gli avvenimenti aleatori sono le chiamate degli abbonati, che avvengono in momenti aleatori e la cui durata è ugualmente aleatoria).

Questo tipo di modellizzzazione del traffico ha premesso di mettere a posto delle prodecure di controllo adattate. Fino a poco tempo fa, il controllo delle reti di comunicazione era un controllo d'ammissione, cioè l'operatore rifiuta all'utente l'accesso alle reti fino a quando quest'ultimo non può garantire una qualità di servizio predefinita. Questo tipo di controllo esige una conoscenza molto precisa dello stato delle reti nel suo insieme, ed è dunque possibile solo nel caso di reti gestite in maniera centralizzata.

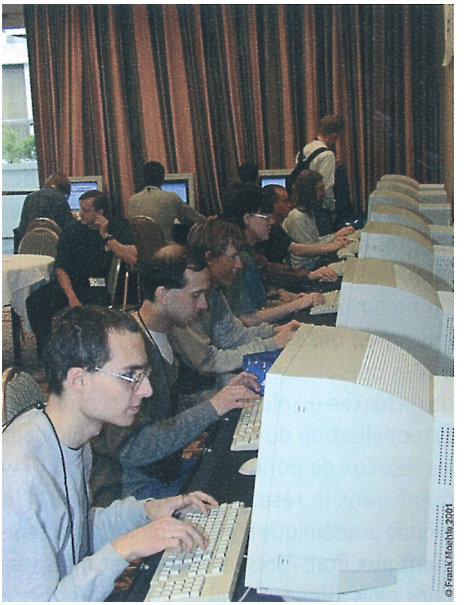
Le reti di comunicazione di oggi non sono più come quelle di una volta. Internet ha conosciuto uno sviluppo straordinario negli ultimi cinque anni (si stima che il traffico delle comunicazioni vocali rappresentava il 90% del traffico globale nel 1997, il 50% nel 2000, e rappresenterà solo il 10% da qui a due anni). Questo progresso ha radicalmente cambiato una situazione che era stabile da più di mezzo secolo. Le ragioni profonde di questo sviluppo rapido vanno ricercate nell'uso, per l'inoltro dell'informazione e il controllo del traffico, di nuovi protocolli di rete (IP, *Internet Protocol*) e protocolli di controllo (TCP, *Transmission Control*

Protocol) decentralizzati, che rendono le reti internet indefinitamente estendibili.

Le proprietà statistiche del traffico sono cambiate. Era necessario capire come e perchè.

Queste modifiche strutturali hanno avuto delle conseguenze sul traffico e sulle sue proprietà statistiche ed è stato necessario sviluppare una teoria matematica adattata alla nuova situazione. In effetti, delle analisi statistiche effettuate a metà degli anni novanta da ricercatori di Bellcore, negli Sati Uniti, e dell'INRIA in Francia, hanno mostrato, prima sulle reti locali e poi sul Web, che il traffico non poteva essere più descritto con l'aiuto della legge di probabilità di Poisson. In particolare, si osservano dei processi aleatori a *memoria lunga* (dove la probabilità di un evento dipende anche dagli eventi che si sono prodotti relativamnete lontano nel passato), e questo esclude tutta la modellizazione usuale fondata sui processi marcoviani classici. Spesso, questi processi presentano ugualmente delle proprietà statistiche conosciute sotto il nome di multi-frattalità, che traducono una grandissima irregolarità. Ora, tutte queste proprietà statistiche hanno delle conseguenze importanti, per esempio per il dimensionamento delle memorie dei routers; senza tenerne conto si potrebbe incorrere nel sottostimare le perdite di pacchetti di informazione attraverso la rete e derivarne delle disfunzioni.

Dopo i primi articoli che mettevano in evidenza le nuove proprietà statistiche del traffico dei dati, numerosissimi lavori sono stati pubblicati al fine di spiegarle. Oggi si è arrivati a comprendere molto bene l'origine del fenomeno di memoria lunga constatato della statistica del traffico. Si è potuto stabilire che esso deriva direttamente sia dalla ripartizione statististica delle dimensioni dei files contenuti nei servers Web e FTP (protocollo di trasmerimento di files) sia dalle dimensioni dei files richiesti dagli utenti al momento delle richieste HTTP (protocollo di trasferimento di ipertesto, utilizzato quando si naviga sul Web) e FTP. Le loro curve statistiche, cioè le curve che rappresentano il numero di



Navigatori in rete in un café-internet. Una buona conoscenza delle proprietà statistiche dei flussi di dati sulla rete Internet è indispensabile per assicurare il buon funzionamento di tutto il sistema. (Negativo Frank Noehle)

files scambiati o consultati in funzione della dimensione, decrescono, per valori grandi, meno rapidamente di un esponenziale, da una parte e dall'altra del loro massimo: si dice che la loro legge di probabilità è sotto-esponenziale. È stato dimostrato che le leggi statistiche sotto-esponenziali alle quali obbedisce il comportamento individuale dei navigatori in Internet, sovrapposti in gran numero data la moltitudine di tali navigatori, hanno come conseguenza diretta il fenomeno di memoria lunga caratterizzante il traffico globale.

Analizzare il protocollo TCP e i suoi effetti al fine di migliorare la gestione della rete Internet.

Non è stato ancora chiarito tutto. I lavori attuali si concentrano sulla spiegazione delle proprietà statistiche del traffico su piccola scala dei tempi, la multi-frattalità in particolare. L'ipotesi più diffusa è che questa proprietà risulti dai protocolli utilizzzati, e propriamente dal TCP. Ma in cosa consiste il protocollo TCP, che controlla attualmente circa il 90% del traffico su Internet? Si tratta di un controllo di flusso di adattamento, dove la quantità di informanzione emessa da una sorgente è comandata da un algoritmo che aumenta linearmente il flusso d'emissione nel corso del tempo, in modo che non si produca un ingorgo; ma nel momento in cui fossero individuate delle perdite, l'algoritmo riduce della metà il flusso di emissione.

È questo controllo di adattamento che regola tutta la risposta alla congestione nella rete. La sua analisi matematica presenta numerose difficoltà, a causa del carattere decentralizzato, stocastico (l'ingombro e le perdite evolvono aleatoricamente), non lineare (gli effetti non sono proporzionali alle cause), complesso (rete molto estesa che comporta interazioni tra i numerosi routers intermedi) della situazione. Ora l'elaborazione di modelli che comprendano tutti questi elementi è un problema maggiore, si tratta di definire delle regole di dimensionamento della rete, ottimizzare i flussi o predire e controllare le variazioni aleatorie della qualità del servizio offerto con la rete ai suoi utenti.

Le sfide scientifiche e gli interessi economici che mobilitano gli universitari e gli industriali.

Una tale lavoro esige degli sforzi di ricerca in settori molto diversi (statistica, teoria della probabilità e delle file di attesa, controllo di adattamento di sistemi non lineari, teoria delle grandi reti stocastiche, sistemi dinamici) ed è tale da superare quelli dell'approccio tradizionale. Negli ultimi anni, un gran numero di modelli più o meno semplificati sono stati proposti. Alcuni di questi hanno permesso di tenere conto della multi-frattalità del traffico globale, proprietà ricordata sopra, altri hanno permesso di valutare se la partizione di un canale di trasmissione in più flussi di dati controllati dal TCP sia equo, etc.

Le ricerche attuali si concentrano anche molto sull'analisi di DiffServ, un

metodo di differenziazione dei servizi offerti, fondato sulla creazione di classi di priorità per lo scambio di dati. Questa sembrerebbe essere la sola strada estendile capace di migliorare la qualità del servizio nella rete Internet. Un altro asse importante concerne l'adattamento di UDP (User Datagram Protocol), un protocollo utilizzato per i flussi di dati video e vocali, flussi che non sono regolati dal TCP, in particolare con lo scopo di definire dei modi di tramissione di questi flussi che siano compatibili con il TCP.

Di fronte a queste questioni che presentano sfide scientifiche e gli interessi economici di principale importanza, il mondo accademico e il modo industriale si organizzano. In che modo? La maggor parte dei grandi gruppi industriali di tecnologie di informazione e di operatori hanno costituito delle équipes di ricerca di altissimo livello, centrate sulla modellizzazione del traffico e del controllo nelle reti di dati, e in particolare nella rete Internet. Lo sforzo del mondo accademico non è da meno, in particolare negli Stati Uniti, in Europa e in alcuni paesi asiatici, dove si mettono in pratica collaborazioni interdisciplinari tra i matematici e i ricercatori in informatica o in ingegneria elettrica.

L'ente che ha la maggiore influenza nello sviluppo della rete Internet è senza dubbio l'IETF (Internet Engineering Task Force, consultabile all'indirizzo http://www.ietf.org). Esso è aperto ad ogni esperto di reti, ricercatore o operatore. Le attività si sviluppano sotto forma di gruppi di lavoro in più settori differenti quali la classificazione, la sicurezza, il trasporto, il controllo di congestione, le applicazioni, etc. Questi gruppi di lavoro sono incaricati di fare delle raccomandazioni, alcune delle quali diventeranno delle norme. La validazione di queste raccomandazioni con gli studi matematici, del tipo di quelli ricordati in questo articolo, costituisce una componente importante e talvolta decisiva del lavoro di regolamentazione.

François Baccelli
INRIA e École Normale Supérieure
(Département d'informatique, Paris

Alcuni riferimenti bibliografici

- K. Park e W. Willinger (eds), *Self similar traffic analysis and performance evaluation* (Wiley 2000).
- P.Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu e D. Veitch, *Wavelet for the analysis, estimation and synthesis on scaling data*, nella referenza precedente.
- F. P. Kelly, A. K. Maulloo e D. K. H. Tan, *Rate control in communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability*, Journal of the Operational Research Society 49, pp. 237-25 (1998).
- R. Riedi e J. Levy-Vehel, *Fractional Brownian motion and data traffic modeling: the other end of the spectrum*, Fractals in Engineering (Springer-Verlag, 1997).
- M.Taqqu, W. Willinger e R. Sherman, *Proof of a fundamental result in self similar traffic modeling*, Computer Communication Review, 27, pp.5-23 (1997).
- F. Baccelli e D. Hong, *Interaction of TCP flows as billiards*, rapporto INRIA, aprile 2002.

Il prezzo delle opzioni finanziarie

Elyès Jouini

Il mondo della finanza fissa il prezzo delle opzioni per mezzo di formule ottenute grazie a dei lavori matematici relativamente recenti. Si persegue la ricerca di formule migliori... e questo interessa solo gli operatori di borsa!

Nella prefazione della quarta edizione di *Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*, pubblicato a Losanna nel 1900, Léon Walras scriveva: *"Tutta questa teoria è una teoria matematica, cioè se l'esposizione si può fare nel linguaggio ordinario, le dimostrazioni si devono fare matematicamente"*. Piú avanti, aggiungeva: *"È molto chiaro che l'economia politica è, come l'astronomia, come la meccanica, una scienza sperimentale e razionale ... Il XX secolo, che non è troppo lontano, sentirà il bisogno [...] di rimettere le scienze sociali nelle mani di uomini di una cultura generale, abituati a trattare con l' induzione e la deduzione il ragionamento e l'esperienza. Allora l'economia*

La Borsa di New York in un giorno di lavoro. La matematica è entrata prepotentemente nel mondo della finanza da più di 20 anni. Analogamente il mondo della finanza fornisce problematiche che stimolano la ricerca in molti settori della matematica. (Negativo Gamma Liaison/Gifford)

matematica prenderà il suo posto accanto all'astronomia e alla meccanica matematica". Io vorrei, attraverso l'esempio che segue, preso a prestito dalla finanza, mostrare come matematica ed economia continuano a mantenere legami molto stretti e che negli argomenti più attuali dell'una e dell'altra disciplina c'è un reale fertile intreccio. Il problema che qui ci interessa è la valutazione delle opzioni finanziarie. La questione è vecchia tanto quanto le opzioni stesse, ne troviamo traccia nell'antichità e nel XVII secolo nel mercato dei tulipani dei Paesi Bassi. È però nel 1973, come vedremo in seguito, che ha trovato la sua prima risposta matematica soddisfacente. E non è un caso che nello stesso anno il mercato organizzato di opzioni, quello di Chicago, ha conosciuto un sviluppo mai interrotto dopo.

Che cosa è una opzione finanziaria? Consideriamo una certa azione quotata sui mercati finanziari, e il cui prezzo oggi è uguale a S. I mercati finanziari offrono ai potenziali acquirenti, attraverso la scappatoia di una opzione, la possibilità di acquistare questa azione in una data successiva, mettiamo fra tre mesi al prezzo K. Questo può essere interessante per un acquirente che, per esempio, non dispone ancora del denaro necessario e vuole garantirsi contro un aumento del prezzo dell'azione. Una tale opzione è una sorta di contratto di assicurazione, che conferisce il diritto di acquistare l'azione in una data successiva a un prezzo garantito K. Evidentemente, questa deve essere essa stessa venduta ad un certo prezzo, ma quale? Questo è il problema di valutazione del prezzo delle opzioni. Per parlare in termini finanziari: quale deve essere il prezzo di una opzione sull'azione S, dello "strike" o prezzo di esercizio K e di scadenza a tre mesi?

È chiaro che l'acquirente di un tale diritto l'eserciterà solo se, nei tre mesi, il prezzo dell'azione sul mercato è superiore a K. Egli potrà allora acquistare l'azione al prezzo K, rivendere al prezzo corrente e realizzare un beneficio uguale alla differenza. Questa opzione procura dunque al suo acquirente, un guadagno uguale alla differenza tra il prezzo corrente dell'azione e K, se questa differenza è positiva, e un guadagno nullo nel caso contrario.

Il principio di non-arbitraggio è alla base della determinazione dei prezzi degli investimenti finanziari.

Per fissare il prezzo di una tale opzione, la teoria dell'arbitraggio si appoggia su un principio molto semplice, anzi semplicistico: l'assenza di opportunità di arbitraggio. In altre parole, questo principio afferma che non è possibile, a partire da un investimento nullo oggi, garantire, purchè succeda qualcosa, un pagamento positivo in una data successiva (non si ha niente per niente). Il principio di assenza di opportunità d'arbitraggio non significa che i guadagni miracolosi siano impossibili. In effetti, io posso benissimo farmi prestare il denaro del prezzo di un biglietto della lotteria e acquistare un tale biglietto - il mio apporto

personale è dunque nullo - e poi guadagnare un milione di euro, rimborsare il mio prestito e guadagnare un beneficio enorme. Il principio enuncia solamente che un tale beneficio non potrebbe essere garantito a priori. In effetti, nell'operazione precedente, io potrei ugualmente non guadagnare niente e essere obbligato a rimborsare il mio prestito: io ho dunque preso un rischio di perdita.

Quindi, l'assenza d'opportunità di arbitraggio significa semplicemente che tutto il guadagno superiore al rendimento di un investimento senza rischio di riferimento (tasso di interesse, obbligazioni, Buoni del Tesoro, etc.) è necessariamente legato a un rischio. Le SICAV, (Società d'investimento a capitale variabile), per esempio, hanno un rendimento medio superiore a quello del mercato monetario; però, questo rendimento non è garantito e può benissimo, come abbiamo visto nel corso del 2001, passare al di sotto di quello del mercato monetario. Supponiamo ora, per semplificare il problema, che il mercato funzioni solo in due date, oggi e fra tre mesi, e che il prezzo S dell'azione in tre mesi potrà prendere solo due valori, supponiamo siano 100 o 150 euro. Supponiamo in più che K, il prezzo di acquisto deciso per l'azione alla scadenza dell'opzione, sia compreso entro il valore massimo $S_h = 150$ euro e il valore minimo $S_b = 100$ euro, per esempio $K = 140$. Se il prezzo dell'azione dopo tre mesi è il valore massimo di 150 euro, il detentore dell'opzione esercita il suo diritto e l'acquista al prezzo precedentemente stabilito $K = 140$ euro; il guadagno associato all'opzione vale dunque $S_h - K = 150 - 140 = 10$ euro. Se il prezzo dell'azione dopo tre mesi è il valore minimo di 100 euro, il detentore dell'opzione rinuncia ad esercitare il suo diritto di acquisto al prezzo K, che è superiore: il guadagno associato all'opzione è dunque nullo.

Si può dimostrare che un tale guadagno può essere ugualmente ottenuto costituendo un portafoglio che contiene solamente le azioni e gli investimenti (o pronti a termine) a termine sui tassi di interesse del mercato, che noteremo qui con r. Chiamiamo C il costo di costituzione di tale portafoglio. Due investimenti dai rendimenti identici devono avere lo stesso prezzo (si prova che nel caso contrario, il principio di non-arbitraggio sarebbe violato); si conclude che il prezzo dell'opzione deve essere uguale a C.

Il costo C del portafoglio, uguale a quello dell'opzione, può essere determinato in modo preciso. Si dimostra che C è una media ponderata dei pagamenti attualizzati dell'opzione, cioè una media ponderata tra gli importi $(S_h - K)/(1 + r)$ e $0/(1 + r) = 0$, e che i pesi che intervengono in questa media sono gli stessi del prezzo S di oggi dell'azione che è, essa stessa, una media ponderata dei pagamenti attualizzati dell'azione ($S_h/(1 + r)$ e $S_b/(1 + r)$) con gli stessi pesi. Più precisamente, si prova che esiste una legge di probabilità tale che il prezzo dell'investimento è uguale alla speranza matematica, calcolata con questa legge, dei suoi pagamenti attualizzati futuri. Quest'ultimo risultato è ottenuto grazie all'algebra lineare elementare, e concerne il modello semplice presentato qui sopra. Ma grazie a

tecniche di analisi convessa apparse a metà del XX secolo, si generalizza al caso in cui l'azione può prendere più valori differenti (in numero finito).

Il calcolo stocastico: quando finanza e matematica teorica si arricchiscono reciprocamente.

Se si vuole essere più aderenti alla realtà e considerare un modello contenuto nei tempi e con un continuum di prezzi possibili, bisogna allora, per interpretare lo stesso principio semplice di arbitraggio, fare appello alle nozioni più avanzate della teoria della probabilità, apparse nella seconda metà del XX secolo. Si tratta più precisamente della teoria dei processi stocastici (processi dove le quantità evolvono aleatoriamente durante il tempo) e della teoria delle equazioni differenziali stocastiche (equazioni differenziali dove intervengono quantità aleatorie). In questi ambiti, gli sviluppi più recenti sono strettamente legati ai problemi riscontrati in finanza.

Questi modelli suppongono che il prezzo dell'azione evolva con un tasso di rendimento deterministico (non aleatorio), al quale s'aggiunge un termine aleatorio di media nulla e di ampiezza propria all'investimento considerato. Questa fluttuazione aleatoria è chiamata *volatilità* e può dipendere dal tempo e da numerosi avvenimenti endogeni o esogeni. Sotto queste ipotesi, si trova che il prezzo dell'opzione obbedisce ad una certa equazione alle derivate parziali (equazione differenziale dove la funzione sconosciuta dipende da più variabili). Nel caso più semplice, studiato indipendentemente dagli americani Fischer Black e Myron Scholes da una parte e da Robert Merton dall'altra nel 1973, questa equazione è la stessa dell'equazione di diffusione del calore, ben conosciuta dai fisici. È allora possibile risolverla esplicitamente e di determinare il prezzo dell'opzione in funzione sia delle sue proprie caratteristiche (scadenza, prezzo di esercizio) sia dall'andamento dell'azione e della sua volatilità: questa è la formula di Black - Scholes e Merton, che ha valso a Scholes e Merton il premio Nobel per l'economia nel 1997 (Black è morto nel 1995).

Questa formula e le sue varianti sono utilizzate in tutte le piazze finanziarie del mondo. Programmate su tutti i computer delle sale dei mercati, e utilizzate innumerevoli volte al giorno, esse sono l'esempio stesso del legame possibile tra matematica teorica e applicazioni concrete. La formula di Black – Scholes e Merton non corrisponde tuttavia che al caso semplicistico in cui il tasso di interesse, il tasso di rendimento medio, il livello di rischio, etc, diminuiranno in modo costante nel corso del tempo. Modificando queste ipotesi, le equazioni ottenute non sono più equivalenti a quella della diffusione del calore. Le equazioni relative ne sono delle varianti e necessitano più spesso di metodi di risoluzione – impliciti, espliciti o numerici – specifici. È lavorando su alcune di queste equazioni che i ricercatori francesi C. Daher e M. Romano, che lavoravano al tempo all'università Paris-Dauphine e alla Cassa

autonoma di rifinanziamento, hanno ottenuto nel 1990 il premio IBM di calcolo numerico intensivo.

Infine, quando si cerca di essere più realistici e di prendere in conto i costi delle transazioni, i diversi obblighi imposti dal mercato o ancora l'impatto del numero delle transazioni sui prezzi, le tecniche di calcolo stocastico non sono più sufficienti. Bisogna sviluppare, come è stato fatto in questi ultimi anni, degli strumenti specifici come le equazioni differenziali stocastiche retrograduate o i metodi fini di dualità e controllo ottimale stocastico. Si scopre allora, e questo può essere sorprendente, che queste nuove idee matematiche, sviluppate per risolvere i problemi economici e finanziarie, sono legate a dei problemi già incontrati in geometria o in fisica - per esempio la deformazione delle superfici o la formazione del ghiaccio - e che le prime illuminano le seconde di una luce nuova.

Elyès Jouini
CEREMADE (Centre de mathématiques de la décision)
Université Paris-Dauphine (Paris 9)

Alcuni referimenti bibliografici

- N. Bouleau, *Martingales et marchés financiers* (Odile Jacob, 1998)
- F. Black et M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities* Journal of Political Economy, 81, pp. 637-654 (1973)
- C. Huang et R. Litzenberger, *Foundations for financial economics*, (North - Holland, 1988)
- L. Walras, *Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale* (Corbaz, Lausanne, 1874, édition définitive revue et augmentée par l'auteur, LGDJ, Paris, 1952).

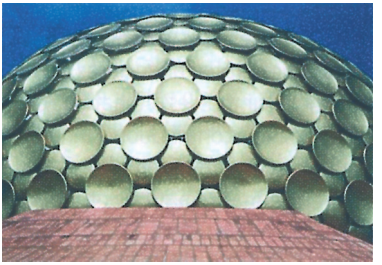
Comunicare senza errori: i codici correttori

Gille Lachaud

Per individuare e correggere gli inevitabili errori che infettano gli scambi di informazione numerizzata, gli specialisti di codificazione fanno uso di metodi astratti che provengono dall'algebra o dalla geometria

Noi siamo in piena era numerica. Che cosa vuol dire ciò? Semplicemente che una parte enorme delle informazioni scambiate attraverso tutto il pianeta sono materialmente rappresentate sotto forma di numeri. Messaggi elettronici, telefonia mobile, transazioni bancarie, teleguida satellitare, teletrasmissione di immagini, dischi CD o DVD, etc.; in tutti questi esempi, l'informazione è tradotta – si dice *codificata* (da non confondere con criptata) – in sequenze di numeri interi corrispondenti fisicamente a segnali elettrici o altro. Più precisamente, l'informazione è generalmente codificata sotto forma di sequenze di cifre binarie - degli 0 e degli 1 detti bit. Per esemprio, nel codice ASCII (American Standard Code for Information and Interchange) utilizzato per i microcomputer, la lettera A maiuscola è codificata dalla sequenza di 8 bit 01000001, la lettera B maiuscola da 01000010, etc.

Un problema maggiore rispetto alla trasmissione dell'informazione è quello degli errori. Basta un piccolo graffio su un disco, un disturbo dell'apparecchio, o un qualunque fenomeno parassita perchè il messaggio trasmesso abbia degli errori, cioè degli "0" che per sbaglio sono stati scambiati con degli "1", o viceversa. Dunque, uno dei numerosi obiettivi del numerico è quello di individiduare, e quindi di correggere, tali errori!



Il Matrimandir di Auroville (Tamil Nadu, India), geode costruito dall'architetto francese Roger Anger. Per trattare efficaci codici di correzione si incontrano problemi collegati a difficili questioni di geometria pura, come quello di ricoprire una sfera col più grande numero possibile di dischi della stessa taglia, senza sovrapposizioni.

Si allungano le parole del messaggio in modo tale che anche dopo la modifica si possa lo stesso riconoscerlo.

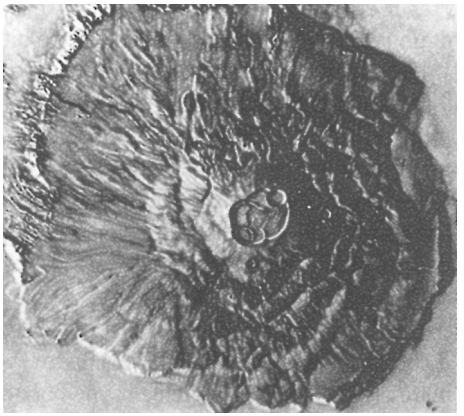
Questa è la funzione dei *codici correttori di errori*, i primi dei quali sono stati formulati nello stesso periodo dei primi computer, cioè più di cinquanta anni fa. Come operano? Il principio è il seguente: si allungano le "parole" numeriche che compongono il messaggio, in modo tale che una parte dei bits servano da bits di controllo. Per esempio, nel codice ASCII di cui sopra, uno degli otto bits è un bits di controllo: esso sarà 0 se il numero degli "1" negli altri 7 bits è pari, e 1 nel caso contrario. Se uno degli otto bits è cambiato inopinatamente di valore, la parità indicata dal bit di controllo non corrisponde più ed un errore è allora individuato. La stessa idea si ritrova in molti numeri che si incontrano nella vita quotidiana. Per esempio, nel rilevamento delle coordinate bancarie, si aggiunge una lettera-chiave a un numero di conto per poter individuare un errore di trasmissione. In modo analogo, i numeri delle banconote degli euro sono codificati per evitare le contraffazioni. Si dice anche che la filiosofia dei codici correttori è quella di comporre dei messaggio "ridondanti": ogni parola del messaggio è allungato in modo da contenere una informazione sul messaggio stesso!

Un esempio semplice e chiarificatore, ma poco realistico, di codice correttore d'errori è la tripla ripetizione: ogni bit del messaggio da codificare è triplicato, cioè 0 diventa 000 e 1 diventa 111. In effetti, se si ricevesse, mettiamo, la sequenza 101, si deduce immediatamente che la sequenza era 111 (si suppone che uno solo dei bit sui tre ricevuti è errato), e dunque che l'informazione iniziale era il bit 1. Il codice della tripla ripetizione non è realistico perchè è costoso: per ogni bit di informazione bisogna inviarne tre; si dice che il suo tasso di rendimento è 1/3. Questo tasso ha delle ripercussioni dirette sulla durata necessaria per la trasmissione dei messaggi e sul costo delle comunicazioni.

Un buon codice correttore deve possedere qualità in più oltre al tasso di rendimento elevato. È necessario che abbia ugualmente una buona capacità di individuazione e correzione degli errori, e che la procedura di decodificazione sia sufficientemente semplice e rapida. Tutta la teoria dei codici correttori di errori è qui: costruire dei codici che individuino e correggano il più possibile gli errori, allungando il meno possibile i messaggi, e che siano facili da decodificare.

L'algebra dei corpi finiti si applica numeralmente ai codici, perchè questi utilizzano un alfabeto finito.

I matematici intervengono da molto tempo su queste questioni. Già nel 1948, il matematico americano Claude Shannon, uno dei padri della teoria dell'informazione, ha ottenuto dei risultati teorici enormi affermando che esistono codici aventi qualità ottimali, in un senso tecnico preciso. Tuttavia, se il teorema di Shannon stabiliva l'esistenza di ottimi codici correttori, non forniva il metodo pratico per costruirli. Del resto, si disponeva di codici correttori dalle prestazioni modeste, come i codici Ham-



Monte Olimpo, sul pianeta Marte, è il più grande vulcano del sistema solare: circa 600 Km di diametro e 27 Km di altezza. Questa immagine è stata ottenuta grazie alla Sonda spaziale Mariner 9, nel 1971-72. La sonda inviava le sue informazioni alla Terra utilizzando un codice di correzione capace di correggere fino a 7 bit errati su 32. In ogni gruppo di 32 bit, 26 erano i bit di controllo e gli altri 6 costituivano l'informazione pulita. Al giorno d'oggi si dispone di codici di correzione ancora più robusti. (Negativo NASA/JPL)

ming, dal nome del loro inventore, il matematico americano Richard W. Hamming (1915-1998), negli anni cinquanta (in questi codici, che sono stati molto utilizzati, i bits di controllo sono determinati in funzione dei bits di informazione attraverso le equazioni lineari semplici).

Gli specialisti si sono allora messi a studiare in maniera sistematica i codici correttori e le loro proprietà, allo scopo di ottenere concretamente dei codici dalle prestazioni vicine a quelle predette dai risultati teorici di Shannon. Per far ciò essi hanno utilizzato a fondo l'algebra. Se la codificazione dell'informazione si fa direttamente nell' "alfabeto" binario 0 e 1, l'algebra sottostante è quella del pari e dispari, conosciuta già da Platone (pari + pari = pari, pari + dispari= dispari, pari × pari = pari, dispari × dispari = dispari, etc.). In effetti, sarebbe più interessante considerare degli "alfabeti" di codici aventi più di due cifre, e di tradurre solo alla fine della procedura i risultati in sequenze di 0 e 1. Siccome un'alfabeto consiste di un numero finito di simboli e noi operiamo effettuando operazioni su questi simboli, l'algebra sottostante è l'oggetto di studio della *teoria dei corpi finiti*, creata dal giovane matematico francese Évariste Galois all'inizio del diciannovesiomo secolo, studiando la risolubilità delle equazioni algebriche (un corpo finito è un insieme d'elementi in numero finito che si possono addizionare, moltiplicare e dividere in maniera analoga ai numeri ordinari, con i risultati di tali operazioni che restano in questo insieme. L'insieme costituito da 0

Qualunque cosa dica questo francobollo emesso in Francia nel 1984, Évariste Galois non era un geometra ma un algebrista. È stato il pioniere della teoria dei gruppi ed anche della teoria dei corpi finiti utilizzata in special modo dagli esperti di codici di correzione di errori. Provocato e costretto ad un duello, Galois è morto a soli 21 anni.

e 1, con le regole del pari e dispari, è il corpo finito di due elementi; è il corpo finito più semplice).

Così, è con l'aiuto dell'algebra astratta ed elaborata, insieme alla teoria dei corpi finiti, che sono stati costruiti codici correttori di errori molto efficaci, adattati ad ogni tipo di trasmissione di informazione. Due esempi tra i molti sono il codice impegnato per l'incisione dei dischi audiometrici (permette di correggere fino a circa 4000 bits errati consecutivi, l'equivalente di una striatura su più di 2 millimetri di traccia!) e quello che utilizza la sonda spaziale Mariner 9 per inviarci le immagini del pianeta Marte.

Una nuova famiglia di codici che fa uso della geometria algebrica delle curve.

L'algebra astratta non è il solo strumento di cui dispongono gli specialisti dei codici correttori. C'è anche la geometria, e più in particolare la geometria algebrica. Questa parte molto vasta della matematica attuale ha come punto di partenza lo studio di oggetti geometrici - curve, superfici, etc. - definiti dalle equazioni algebriche. Tutti i liceali sanno per esempio che una parabola può essere rappresentata da una equazione algebrica, del tipo $y = ax^2 + bx + c$, dove x e y sono le coordinate dei punti della parabola. Si possono anche studiare le curve definite su corpi finiti, cioè quelle nelle cui equazioni algebriche che le rappresentano, si hanno un numero qualunque di variabili come x e y ma tutte appartenenti ad un certo corpo finito. Utilizzando tali curve e l'algebra associata alle coordinate dei loro punti (che sono in numero finito), è stata inaugurata, da circa venti anni, una nuova famiglia di codici correttori: i codici geometrici. Questo ha permesso di ottenere dei nuovi risultati concernenti i codici binari, e di costruire dei codici con prestazioni ancora più alte di quelle predette dal lavoro di Shannon. Viceversa, l'analisi dei codici geometrici ha portato i matematici ad esaminare più da vicino il numero di punti di una curva algebrica definita su un corpo finito. Si ha quindi un bell'esempio dell'azione positiva che un dominio di applicazione può esercitare sulla disciplina teorica di cui si serve.

Gille Lachaud
Institut de mathèmatiques de Luminy, CNRS, Marseille

Alcuni riferimenti bibliografici

- P. Arnoux, *Codage et mathématiques*, La science au présent (édition Encyclopædia Universalis, 1992).
- P. Arnoux, *Minitel, codage et corps finis*, Pour la Science (mars 1988).
- G. Lachaud et S. Vladut, *Les codes correcteurs d'erreurs*, La Recherche (juillet-août 1995).
- O. Papini, *Disque compact: "la théorie, c'est pratique!" dans "Secrets de nombres"*, Horssérie n. 6 de la revue Tangente (1998).
- O. Papini e J. Wolfmann, *Algèbre discrète et codes correcteurs* (Springer-Verlag, 1995).
- J. Vélu, *Méthodes mathématiques pour l'informatique* (Dunod, 1995).
- M. Demazure, *Cours d'algèbre - primalité divisibilité, codes* (Cassini, 1997).

Ricostruire le superfici per l'iconografia

Jean-Daniel Boissonnat

Ricostruire una superficie conoscendone solo alcuni punti: un problema che si incontra spesso, che si tratti di eplorazioni geologiche, di archiviazione di reperti archeologici, di iconografia medica o industriale

Ogni qualvolta si sondi il sottosuolo in alcuni siti per conoscere le configurazioni dei differenti strati archeologici, o ogni qualvolta si voglia cartografare il fondale marino, il numero dei punti di misura è necessariamente finito. Bisogna ricostruire, a partire da un numero limitato di punti dati, le superfici corrispondenti. La situazione è analoga per tutti i sistemi di iconografia informatizzati (scanners, telemetri, generatori di immagini tridimensionali, etc.) utilizzati in medicina, nell'industria, nell'archeologia, etc. Come punto di partenza, c'è un oggetto reale - che può essere una parte del corpo umano, un pezzo meccanico, un reperto archeologico, una struttura geologica, o altro. Di questo oggetto reale, gli strumenti possono registrare solo alcuni punti, a partire dai quali bisogna ricostruire virtualmente la forma dell'oggetto.

Questo è il problema detto ricostruzione delle superfici (Figura 1). Esso consiste, dunque, nello sfruttare un numero finito di punti per fornire una rappresentazione geometrica ed informatica

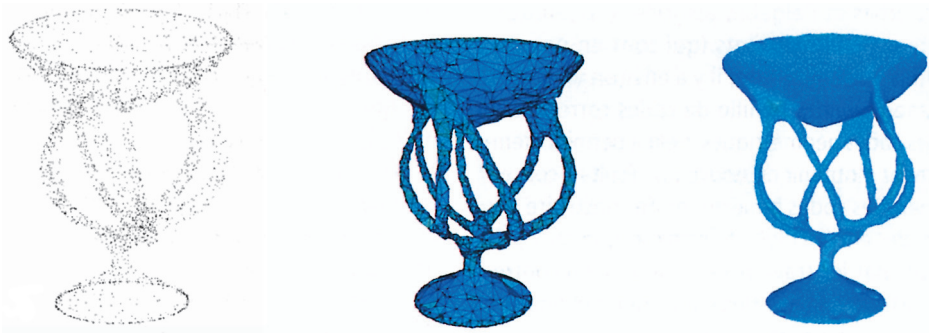


Figura 1. La ricostruzione di una superficie a partire da un campionamento dei suoi punti: questo problema può essere affrontato nelle situazioni più svariate.

dell'oggetto, che permetterà di visualizzarlo su uno schermo, di archiviarlo nella memoria di un computer, di effettuare calcoli agilmente, di modificare l'oggetto o di telecomandarne la fabbricazione di una copia. In breve, una volta che la forma di un oggetto reale è numericamente registrata, e questo è stato fatto con una sufficiente precisione, si dispone di una gran quantità di possibilità di azione e di calcolo.

Le applicazioni economiche e industriali del problema della ricostruzione delle superfici, il suo carattere fondamentale dal punto di vista scientifico, hanno portato a numerosi lavori negli ultimi venti anni. Ma è soltanto molto recentemente che gli specialisti hanno formalizzato in termini matematici il problema, cosa che ha permesso loro di concepire degli algoritmi efficienti e che forniscono una ricostruzione fedele. Il trasferimento verso l'industria di alcuni di questi risultati di geometria detta algoritmica, è stata allora operato in maniera molto rapida attraverso la creazione di giovani germogli (come *Raindrop Geomagic* negli Stati Uniti) o il lancio di nuovi prodotti tramite i leaders del concepimento assistito attraverso i computer o dell'iconografia medica (*Dassault Sistèmes, Siemens Medical*).

Diagrammi di Voronoï e triangolarizzazione di Delaunay, due strumenti geometrici indispensabili.

Per ricostruire una superficie a partire da una nuvola di punti che ne sono un campione, la maggior parte degli algoritmi utilizzano uno strumento centrale in geometria algoritmica: la triangolarizzazione di Delaunay, detta così da Boris Delone (1890-1980), matematico russo il cui nome è stato francesizzato in Delaunay. La triangolarizzazione di Delaunay si definisce naturalmente a partire da quello che è detto *diagramma di Voronoï*, dal nome del matematico russo Georgi Voronoï (1868-1908). Consideriamo un insieme finito di punti dello spazio e chiamiamolo E. Il diagramma di Voronoï di E è una divisione dello spazio in cellule convesse (in blu nella figura 2), dove ogni cellula è formata dai punti dello spazio più vicini ad un punto di E rispetto a tutti gli altri punti di E. Le cellule – che sono poliedri convessi – sono in questo modo definite in modo unico.

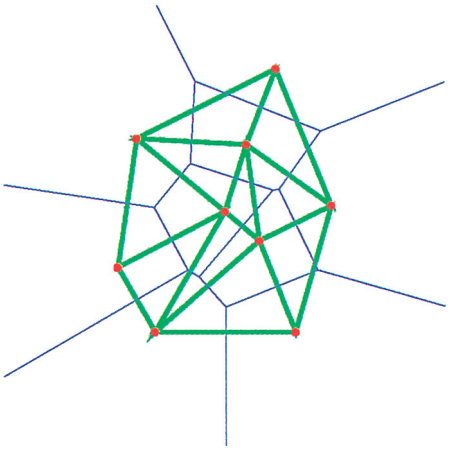


Figura 2. Il diagramma di Voronoï (in blu) e la triangolarizzazione di Delaunay (in verde) di un insieme di punti (segnati in rosso). Il diagramma di Voronoï e la triangolarizzazione di Delaunay sono strumenti fondamentali in geometria algoritmica.

Ora, uniamo con dei segmenti di retta i punti di E a cui le cellule di Voronoï sono adiacenti. L'insieme di questi segmenti costituisce la *triangolarizzazione di Delaunay* (in verde nella Figura 2) associata ad E. Queste strutture si definiscono in spazi di qualunque dimensione; questo è il caso di dimensione tre – lo spazio usuale – che è il più interessante per la ricostruzione delle superfici. I diagrammi di Voronoï (figure 2 e 3) figurano tra i principali oggetti di studio della geometria aritmetica. Negli anni ottanta è stato stabilito il loro legame con la teoria dei politopi (oggetti analoghi ai poliedri negli spazi di dimensione superiore a tre). Il loro studio nell'ambito del campionamento delle superfici è invece molto più recente. Qual è l'interesse dei diagrammi di Voronoï e delle triangolarizzazioni di Delaunay? Se E è un campione di n punti, presi su una superficie S, si può dimostrare che il suo diagramma di Voronoï e la triangolarizzazione di Delaunay corrispondente contengono molte informazioni su queste superfici. Se il campione è sufficientemente denso, si possono fornire delle approssimazioni precise della superficie. Per esempio, il vettore che unisce un punto di E con la cima più lontana della sua cellula di Veronoï è una buona approssimazione della normale alla superficie S nel punto P.

Bisogna assicurarsi che i tempi di calcolo restino ragionevoli e che gli argoritmi siano affidabili.

Si conoscono oggi molteplici algoritmi di ricostruzione capaci, a partire da un campione finito di punti di una superficie S, di costruire una superficie S' che approssima correttamente la superficie reale S. In più, la teoria di questi algoritmi permette di calcolare un limite superiore per la differenza tra S e S', limite che dipende evidentemente dalla densità del campione.

Siccome le serie di dati forniti dagli strumenti di misura comportano generalmente molte centinaia di migliaia di punti, a volte milioni, le questioni combinatoriche e algoritmiche giocano un ruolo critico. È importante, per esempio, sapere se la quantità di calcoli di cui necessita la triangolarizzazione di Delaunay resterà o no in un limite ragionevole. Nei casi più sfortunati, il numero T delle tappe di calcolo (cioè, alla fine dei conti, i tempi di calcolo) può essere quadratico; equivalentemente si dice che T è al peggio proporzionale al quadrato del numero dei punti del campione. Si suppone, ogni volta, che questa situazione non si presenti nel caso di superfici ben campionate. Risultati più precisi sono stati dimostrati più recentemente nel caso di superfici S poliedriche, cioè costituite uni-

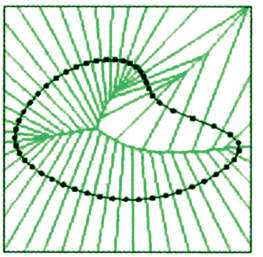


Figura 3. Il diagramma di Voronoï di un insieme di punti presi sopra una curva.

camente di facce poliedriche: per tali superfici e per condizioni di campionamento affidabili, la quantità di calcolo di triangolarizzazione è, al peggio, proporzionale al numero di punti campionati. Il caso di superfici lisce è il più delicato; ed è attualmente ancora vivo oggetto di ricerca.

I limiti teorici non sono tutto, bisogna inoltre saper calcolare effettivamente e rapidamente la triangolarizzazione di una serie di dati. Si conoscono numerosi algoritmi. I più efficienti sono detti randomizzati perchè essi utilizzano una serie di scelte aleatorie nel corso del loro processo. La teoria degli algoritmi randomizzati si è sviluppata molto rapidamente negli anni novanta, ed ha condotto a delle analisi precise, convalidate sperimentalmente. Nei casi buoni, e il calcolo della triangolaizzazione di Delaunay è uno di questi, l'introduzione parziale del caso autorizza a non cercare di risolvere in maniera ottimale il caso peggiore (che è il più probabile) e conduce ad algoritmi semplici e in media più efficienti. Si sa così trattare il campionamento di 100000 punti in una diecina di secondi (Pentium III a 50 MHz).

Se calcolare velocemente è importante, ancora di più lo è calcolare il maniera affidabile. Questa questione è delicata, perchè i computer non sanno rappresentare i numeri se non con una precisione finita (un numero finito di decimali). Dunque, è impossibile dare una rapresentazione in modo numerico ed esatto di numeri come π o $\sqrt{2}$, che hanno un numero infinito di decimali. L'accumulazione di errori di arrotondamento può quindi comportare un comportamento anormale dei programmi. Se tali comportamenti sono ben conosciuti, è anche vero che essi sono molto difficili da dominare, e la realizzazione e il mantenimento di algoritmi affidabili sono molto costosi. Una parte importante della ricerca recente in geometria algoritmica si occupa di queste questioni e mescola algoritmi, calcolo formale (dove il computer manipola simboli e non numeri espliciti) e aritmetica dei calcolatori. Esse hanno ora ed hanno avuto già sbocchi nell'ambito dello sviluppo di librerie di softwares permettendo una programmazione facile, efficiente e sicura, come la libreria CGAL (Computational Geometry Algorithm Library) sviluppata attraverso una collaborazione internazionale tra università e organismi di ricerca.

Jean-Daniel Boissonnat
INRIA-Sophia Antipolis

Alcuni riferimenti bibliografici

- J.-D. Boissonnat et M. Yvinec, *Algorithmic Geometry*, Cambridge University Press 1998.
- J.-D. Boissonnat et F. Cazals, *Smooth surface reconstruction via natural neighbour interpolation of distance functions*, dans Proceedings of the XVI Annual ACM Symposium of Computational Geometry (2000).
- CGAL, Computational Geometry Algorithms Library, http://www.cgal.org

I Matematici in Francia, in Italia e nel Mondo

Fino alla fine del diciannovesimo secolo, i "geometri", come erano allora chiamati i matematici, erano non molto numerosi. In un secolo il loro numero si è notevolmente allargato. Ed oggi devono confrontarsi con un profondo cambiamento della loro disciplina.

Nel corso del ventesimo secolo la comunità matematica ha conosciuto il suo momento di massima espansione. Siamo passati da qualche centinaio di membri del 1900 a decine di migliaia (qualche stima parla di 80.000) cento anni più tardi.

Ma per fare stime di questo tipo, è necessario preliminarmente intendersi sul significato del termine *matematico*.

In genere si attribuisce una tale qualifica a coloro che hanno raggiunto un livello di formazione equivalente a quella del "dottorato" e la cui professione richiede una formazione per la quale la ricerca matematica, o una profonda assimilazione dei suoi risultati, siano elementi fondamentali.

Questa scelta può anche sembrare limitativa in quanto, ad esempio, esclude dall'insieme dei matematici tutti i professori di matematica dell'insegnamento secondario, una categoria aumentata moltissimo, in tutti i paesi del mondo, in quest'ultimo secolo.

L'aumento del numero dei matematici è la conseguenza di più cause concomitanti. C'è stata anzitutto, subito dopo la fine della seconda guerra mondiale, una chiara presa di coscienza circa l'importanza delle Scienze all'interno dello sviluppo economico ed industriale. Peraltro nuovi gruppi di persone si sono avvicinati a questa professione: ad esempio le donne, anche se sono ancora note situazioni di una certa disparità nei vari paesi. Ma è il crescere ed il manifestarsi, in ogni paese, di una forte comunità accademica, dedita all'insegnamento più avanzato, il punto certamente più rilevante. Per fare solo un esempio, i matematici originari dell'Africa sub-sahariana hanno sostenuto le loro prime tesi di dottorato negli anni '70, dopo essersi formati in alcune università occidentali o dell'Unione Sovietica. Le generazioni successive hanno completato i loro studi nel paese di origine: nel decennio 1990 - 2000, numerosi paesi dell'Africa sub-sahariana hanno mostrato una loro autonoma formazione superiore ed hanno, almeno da questo punto di vista, conquistato una certa in-

dipendenza. Ci si aspetta che, nei prossimi anni, tale espansione aumenti, probabilmente con l'arrivo di nuove forze provenienti da altri paesi quali la Cina e l'India.

Una comunità di ricercatori e le sue connessioni con le accademie.

Come sono organizzate le comunità dei matematici? L'espansione della comunità matematica internazionale si è sviluppata, anche se in modo molto più debole e meno appariscente, in parallelo con quella delle accademie, enti che sono vissuti quasi essenzialmente grazie all'impegno ed al volontariato di alcune persone. Le società matematiche sono ancor oggi di dimensioni assai modeste, con l'eccezione dell'American Mathematical Society che conta su 200.000 affiliati e si può permettere circa 200 dipendenti.

Il primo passo dello sviluppo si è verificato a livello nazionale, quasi sempre nel momento in cui i poteri politici hanno percepito il fatto che le scienze potevano rappresentare un punto d'appoggio per l'economia e per le forze armate. È così che è nata la Société Mathématique de France (SMF) (nel 1872 insieme alla Société Française de Physique), praticamente subito dopo la disfatta del 1870 della Francia da parte della Germania, riflettendo sulle cause di quel che era appena successo. Fortunatamente questa prospettiva, del tutto nazionalista, è terminata. [1]

L'Unione Matematica Internazionale (IMU) è stata creata nel 1896. È tuttavia rimasta una società con una piccola struttura. Il suo impegno principale è quello di fornire la cornice al *Congresso internazionale dei matematici*, un evento quadriennale che offre un appuntamento, unico su scala mondiale, alla comunità matematica internazionale.

Il Comitato Esecutivo dell'IMU è anche incaricato di designare la commissione che, ogni quattro anni, assegna le *Fields medals*; non essendoci il Premio Nobel per la matematica, queste ultime rappresentano la più alta onorificenza che sia possibile assegnare ad un matematico.

Alla fine del ventesimo secolo si è potuto assistere alla nascita ed allo sviluppo di strutture continentali intermedie fra le società nazionali e quella internazionale. Il primo esempio viene dai colleghi africani che hanno creato, negli anni '80, l'*Unione Matematica Africana*. Successivamente sono apparse la *Società Matematica Europea* (EMS), dopo un lungo tribolato cammino (quasi ad immagine di quello che ha portato alla formazione dell'Unione Europea), che raggruppa dal 1990 tutte le società nazionali dell'Europa geografica e di Israele, e l'UMALCA, che raggruppa i matematici dell'America latina e dei Caraibi. Queste

([1]) Anche l'Unione Matematica Italiana, è nata nel 1922, all'indomani della fine della prima guerra mondiale. (nota del Segretario dell'UMI, traduttore dell'articolo)

nuove associazioni sono nate con la volontà di rinforzare la collaborazione internazionale a livello di scala continentale e, di pari passo con la storia delle nazioni, di avere un interlocutore rappresentativo di fronte all'apparizione di nuove entità politiche, quali appunto l'U.E., oppure di controllare qualche risorsa, anche proveniente dall'America del Nord, all'indomani del brutto periodo delle dittature militari.

Una presenza sempre più vasta nell'industria e nei servizi

Dove lavorano i matematici? La grande novità è che, oggi, i matematici sono presenti in numerosi settori dell'industria e dei servizi. Non si può comunque parlare di una *industria matematica* come si parla dell'industria chimica o dell'industria farmaceutica. In effetti gli incarichi affidati a persone che hanno una forte competenza e notevoli conoscenze matematiche, hanno nomi molto vari e ciò rende difficoltoso anche contare quanti sono i "matematici industriali". Una stima recente ci dice che, ad esempio in Francia, essi sono circa 2000. Questo numero può essere confrontato con quello tradizionale delle Università ed enti di ricerca, che, sempre in Francia, sono circa 4000. È da notare comunque che, in Francia ed in altri paesi della U.E., il rapporto fra ricercatori matematici in enti pubblici di ricerca e accademici è circa 1 contro 9, a differenza di altri settori di ricerca nei quali una percentuale molto più grande di studiosi può dedicarsi alla ricerca senza obblighi didattici.

Quali sono le aree di lavoro più interessate ad assumere matematici? Le banche e le assicurazioni ne "usano" sempre in numero maggiore perchè necessitano di competenze matematiche per la semplice ragione che i prodotti che poi "vendono" sono basati fortemente sulla matematica. Ma la stessa cosa accade per un bel numero di imprese di alta tecnologia per le quali lo studio di sistemi complessi richiede inevitabilmente un approccio matematico che, successivamente, i potenti strumenti di calcolo riescono a rendere pienamente operativo. Queste nuove figure professionali contribuiscono a dare una idea sempre più moderna e variata del matematico presso l'opinione pubblica e presso gli studenti. Ciò nonostante questi aspetti non sono ancora stati completamente fatti propri dall'insegnamento preuniversitario a causa forse della grande inerzia del sistema educativo nazionale (Francia, Italia, ...) ancorato all'obiettivo di formare altri insegnanti o ricercatori universitari.

I matematici di fronte ad una nuova sfida.

Tutti questi movimenti hanno avuto alcune ripercussioni sulla vita delle comunità matematiche, sia per i contenuti dell'insegnamento avanzato, sia per il livello della ricerca. Vi è stata una lunga discussione, praticamente in tutte le società occidentali, fra *Matematica pura* e *Matematica applicata*: questo modo di

porre la questione è del tutto ingiustificato, per almeno due ragioni. Da una parte, ricordando come, già da esempi tratti dalla storia, nuove tecniche e nuove scoperte matematiche sono nate a partire da numerose sollecitazioni del mondo esterno e dall'altra osservando come gli obiettivi che si vogliono raggiungere non siano, a priori, definibili indicando quale matematica sarà quella necessaria a quello scopo. Numerose sono state le "sorprese" in corso d'opera e queste ci hanno fatto constatare come la dicotomia *pura-applicata* sia del tutto improduttiva. Ed è dal contesto tutto interno alle tensioni della comunità matematica francese che è nata, nel 1983, la SMAI (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles). Dopo 20 anni le due società (SMF e SMAI) hanno trovato un efficace modo di collaborazione e portano avanti insieme azioni di interesse comune. Esse coinvolgono a tutt'oggi 3000 studiosi, numero ben superiore all'unione delle singole forze delle due società.

La novità principale risiede nella possibilità di studiare, grazie all'uso di modellizzazioni diverse, i sistemi complessi con più cura ed in numero maggiore. Costruire modelli è oggi una pratica alla quale si ricorre sempre più anche se ciò richiede un maggior approfondimento sui fondamenti, senza trascurare quelli filosofici, della disciplina. Una capacità che sarà bene sviluppare è il confronto fra il modello studiato e la realtà che tale modello vuole rappresentare.

Tuttavia è importante sottolineare due tendenze di grande spessore che si servono a piene mani di questi nuovi contatti della matematica con il mondo esterno: nuova importanza data alle strutture finite (ovvero le strutture matematiche che mettono in gioco solo un numero finito di elementi) e la generalizzazione delle procedure stocastiche (quelle cioè che fanno intervenire i processi aleatori). In questo secondo dominio la Francia è riuscita ad avere una buona preminenza anche rispetto ai paesi dello stesso livello di sviluppo (forse con l'eccezione di alcuni campi della statistica e dell'analisi dei dati). In compenso, nell'insegnamento della matematica del discreto, ovvero quella che si basa sulle strutture finite, c'è ancora molto da fare: sono infatti ancora pochi i corsi di insegnamento superiore che offrono in questi campi una preparazione sufficientemente esauriente.

Recentemente, durante un colloquio dedicato alla storia della geometria nella seconda metà del ventesimo secolo, Stephen Smale, un matematico americano che è stato uno dei padri della topologia moderna e che poi si interessato molto da vicino a questioni di analisi numerica, ha fatto un'osservazione molto pertinente: al giorno d'oggi il crescere straordinario della matematica è assicurato anche da studiosi che la comunità matematica talvolta non riconosce come facenti parte di essa. È vero infatti che la Statistica, l'Automatica, la Ricerca Operativa e la Teoria dei Controlli non sono spesso "rappresentati" nei Dipartimenti di Matematica delle Università, mentre queste discipline, nella loro vera essenza, sono

decisamente "matematica". E si potrebbe dire la stessa cosa per una buona parte dell'informatica teorica: quest'ultima ha con la matematica dei collegamenti particolarmente organici la cui forza e la cui profondità non sono sempre riconosciuti dall'ambiente matematico. Questa situazione apre alla comunità matematica nuovi orizzonti di crescita purché i matematici non si dimostrino alieni dall'accettare queste "nuove" attività nel proprio ambito. Con più curiosità e con spirito più aperto c'è dunque la possibilità di aumentare gli stimoli e di approfondire nuovi campi di ricerca per il bene più grande che possiamo immaginare: lo sviluppo stesso delle scienze matematiche.

Il cambiamento della professione esige nuovi profili formativi

Una delle prime cose da prendere in considerazione concerne la pratica che, nel mestiere del matematico, è richiesta da questi nuovi contatti, pratica che non può limitarsi alla dimostrazione di alcuni teoremi. È necessario che al giorno d'oggi un numero sempre maggiore di matematici, magari con un profilo di ricerca molto diverso, si interessi alle applicazioni. Ciò richiede però che si cerchi uno scambio con gli esperti di altre discipline con un orecchio molto ben attento alle problematiche di quest'ultimi.

In diverse parti del mondo, nell'insegnamento avanzato, si può già notare la propensione ad una formazione specializzata, ad esempio in matematica finanziaria. Altri aspetti, per i quali sono apparsi sbocchi professionali al di fuori del mondo accademico, stanno per essere focalizzati e con una nitidezza proporzionale allo spessore degli sbocchi: è già forse il caso della formazione degli attuari ed è possibile anche anticipare che stanno per essere varati percorsi di formazione mista, ad esempio, fra matematica e biologia e fra matematica e medicina.

Sarebbe naturalmente un errore lasciar crescere senza criterio curricula formativi troppo specializzati. E questo per due ragioni: da una parte la ristrettezza, ancora evidente, di approccio, e dall'altra il pericolo di scissioni nella comunità matematica.

Modifiche assai profonde dei corsi di studio e di formazione dovranno essere messe in atto affinché gli studenti percepiscano nel modo più naturale le nuove possibilità di orientamento professionale, dovute a questa "nuova" matematica. Sarà necessario creare una buona fluidità fra il mondo accademico ed il mondo dell'industria e dei servizi; è una condizione affinché si presenti spontaneamente un certo afflusso di buoni problemi di ricerca, orientati spesso a nuove tematiche, e perché poi questi problemi siano trattati col profondo rigore tipico della ricerca matematica.

Jean-Pierre Bourguignon
CNRS-IHÉS et École Polytechnique, Palaiseau.

La Matematica in Italia

Da ormai quattro anni è in atto in Italia una profonda ristrutturazione degli studi universitari. Questa è consistita principalmente nel passaggio dal "ciclo unico", quadriennale nel caso della Matematica o quinquennale nel caso dell'Ingegneria, ad una struttura uniforme per tutti i corsi di studio, detta 3+2, ovvero articolata su un primo livello di Laurea alla fine di un corso di studio triennale e una Laurea Magistrale alla fine di altri due anni di specializzazione universitaria. A questo si aggiunge poi il Dottorato di Ricerca, che a regime è previsto in due anni, prevalentemente destinato a chi intende avviarsi verso la ricerca.

Nel caso della formazione matematica, questa riforma ha dato origine a vari ed interessanti tentativi di ristrutturazione dei corsi di laurea, improntati alla ricerca di un maggior coinvolgimento attivo dello studente. Molte sedi hanno, ad esempio, organizzato corsi di "laboratorio matematico" dove "sperimentare" le nozioni teoriche acquisite nei corsi più tradizionali; si è cercato cioè di aprirsi alle varie valenze applicative della formazione matematica.

Nonostante questi sforzi, gli studi in matematica sembrano tuttora afflitti da una immagine tradizionale di isolamento dal contesto sociale, di difficoltà e di "improduttività". Non è inusuale trovare ancora chi pensa che il loro sbocco prevalente, se non esclusivo, sia quello dell'insegnamento, salvo per quei pochi fortunati che si inseriranno nella ricerca universitaria: ne consegue talvolta che molti giovani, che pure sono attratti dalla studio di questa materia, scelgono poi altre strade ritenute più "remunerative".

L'idea che il laureato in matematica sia destinato a sbocchi occupazionali "improduttivi" ignora di fatto una diversa realtà. Anzitutto che studi anche *astratti*

Politecnico di Torino.

come quelli matematici possono avere applicazioni significative nei settori produttivi (si pensi ad esempio alla rilevanza che un campo di studi sommamente astratto quale la teoria dei numeri ha per gli odierni metodi di crittografia, basati sulla fattorizzazione dei numeri primi).[2]

Inoltre è noto che questi studi sviluppano una forma mentis che mette in grado di affrontare problemi reali di notevole complessità. Ciò è comprovato dal fatto che una percentuale rilevante dei laureati in matematica oggi è in realtà assorbita dal mondo produttivo (banche, assicurazioni, industrie, centri di consulenza, ...), anche se questo fenomeno è forse sconosciuto ai più a causa dal numero relativamente piccolo dei giovani coinvolti.

Negli ultimi decenni praticamente tutte le lauree scientifiche hanno attraversato un difficile periodo, con un calo costante degli immatricolati ai corsi di laurea non solo di Matematica, ma anche di Fisica e Chimica. Questo fenomeno non è limitato all'Italia, ma ha coinvolto tutti i paesi occidentali, ad iniziare dagli Stati Uniti, ed è ultimamente balzato all'attenzione dei media, che hanno a loro volta portato all'attenzione del grande pubblico questo fenomeno e le sue drammatiche conseguenze in termini di perdita di capacità di innovazione tecnologica.

In molti paesi europei si sono cercati rimedi sotto forma di incentivazioni agli studenti delle discipline scientifiche. Dallo scorso anno anche in Italia esiste un'incentivazione sotto forma, ad esempio, di rimborsi delle tasse universitarie per gli studenti di questi corsi di laurea. A queste si affiancano, per la Matematica, un certo numero di borse di studio messe in palio dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica e assegnate tramite un concorso nazionale che si svolge nelle varie sedi locali dei Corsi di Laurea verso la metà di settembre (per informazioni vedi http://www.altamatematica.it/).

Altre azioni di incentivazione e di promozione dell'innovazione didattica per la Matematica, la Fisica e la Chimica sono previste, dal febbraio 2005, da un Progetto (detto Progetto Lauree Scientifiche) del Ministero dell'Istruzione, Università e Ricerca Scientifica, in collaborazione con la Confindustria e la Conferenza dei Presidi delle Facoltà di Scienze.

Un aspetto che evidenzia, in paradossale contraddizione con l'accennato "isolamento sociale" del matematico, l'importanza della Matematica nel quotidiano e la conseguente richiesta di competenze matematiche per le professioni che necessitano di ricerca diretta verso l'innovazione tecnologica, è l'apparire, non solo in Italia della figura dell'Ingegnere matematico. Lo sviluppo dei vari settori dell'ingegneria, dovuto alla richiesta d'innovazione tecnologica, richiede conoscenze sempre più ampie ed approfondite di tipo matematico.

La formazione di questa figura vede pertanto la confluenza di tre ambiti formativi:

– quello matematico, che fornisce una solida preparazione matematica di base istituzionale;

([2]) Più in generale si vedano tutti gli esempi pubblicati in questo volume.

Scuola Normale Superiore di Pisa.

– quello fisico/ingegneristico, che fornisce gli strumenti per la comprensione e descrizione dei problemi dell'ingegneria;

– quello di tipo modellistico-numerico in cui l'approccio matematico e quello fisico/ingegneristico sono fortemente integrati.

Il corso di studio ad esso preposto, finalizzato allo sviluppo di una mentalità di "problem solver" nelle applicazioni mediante strumenti matematici avanzati, ha come obiettivo la formazione di professionisti in grado di affrontare, con la mentalità propria dello scienziato applicato, problematiche relative a sistemi complessi, nei quali è presente una forte interdisciplinarietà, utilizzando metodologie offerte dai vari settori della matematica e della matematica applicata. La sua forma mentis lo porta ad indagare, con un elevato standard di rigore, soprattutto i principi di funzionamento e la natura degli oggetti matematici e scegliere poi, con la competenza appropriata, il modello (matematico) da usare sulla base di un eventuale compromesso tra accuratezza desiderata e complessità tollerata.

Concludiamo sottolineando un aspetto fondamentale della ricerca matematica ovvero la sua internazionalità: il continuo scambio con centri di ricerca stranieri (tesi di dottorato, agenzie spaziali, stazioni metereologiche, conferenze, visite a medio o lungo termine) è alla base dello sviluppo della matematica, scienza intrinsecamente senza frontiere.