ELETTROTECNICA CON I NUMERI COMPLESSI

Premessa

Abbiamo visto (TESTO DI FISICA WALKER pag 63) che in regime di corrente alternata C.A. in presenza di elementi come condensatori ed induttori viene introdotta una grandezza detta impedenza che ricopre lo stesso ruolo della resistenza nei circuiti in corrente continua C.C. in modo da poter continuare ad utilizzare la legge di Ohm V=RI anche in regime di C.A.

Per un circuito RCL in serie in regime di C.A.

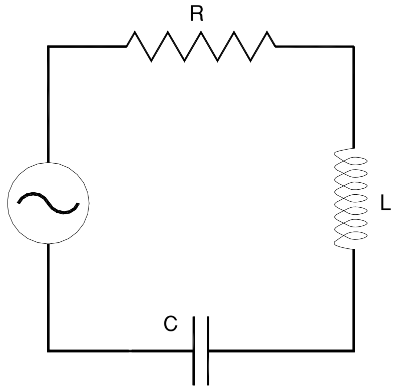


Figura 1

il modulo dell'impedenza Z viene calcolata (pag. 63) come

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

La cui unità di misura è sempre in Ohm proprio perché si mantiene l'analogia con il significato della resistenza nei circuiti C.C.

Ma per circuiti di seguito

①

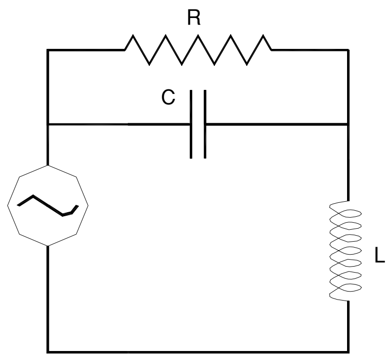


Figura 2

②

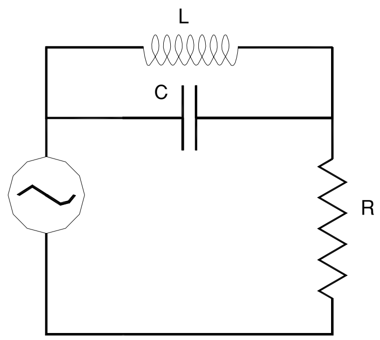


Figura 3

come si calcola l'impedenza?

Vale comunque sempre l'analogia con i circuiti resistivi, per cui:

Resistenze in serie $R_{equivalente} = \Sigma R \rightarrow Z_{equivalente} = \Sigma Z$

Resistenze in parallelo $\frac{1}{R_{equivalente}} = \Sigma \frac{1}{R} \rightarrow \frac{1}{Z_{equivalente}} = \Sigma \frac{1}{Z}$

Ma la gestione dell'impostazione e la risoluzione dei calcoli sarebbe un po' problematica. Per fortuna ci vengono in aiuto i numeri complessi che permettono di evitare errori di impostazione nell'assemblaggio delle varie impedenze.

Numeri immaginari e numeri complessi.

La quantità indicata con la lettera *i* viene assunta unità immaginaria.
Moltiplicando l'unità per sé stessa si ha
$i \cdot i = i^2 = -1$ e di seguito $i^2 \cdot i = i^3 = -1 \cdot i = -i$
$i^3 \cdot i = i^4 = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$ e così via. Si vede così che alcune potenze non contengono l'unità immaginaria e quindi risultano numeri reali

Introducendo la rappresentazione del piano di Gauss o Argand l'asse orizzontale rappresenta i numeri reali, l'asse verticale i numeri immaginari.
Le potenze elencate in precedenza hanno pertanto rappresentazione

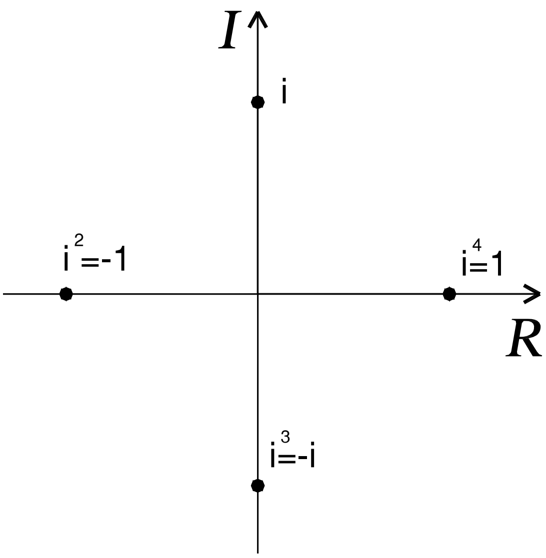


Figura 4

Si può notare che moltiplicando una quantità per l'unità immaginaria ***i*** il risultato è ruotato di π/2 in senso antiorario rispetto la quantità iniziale

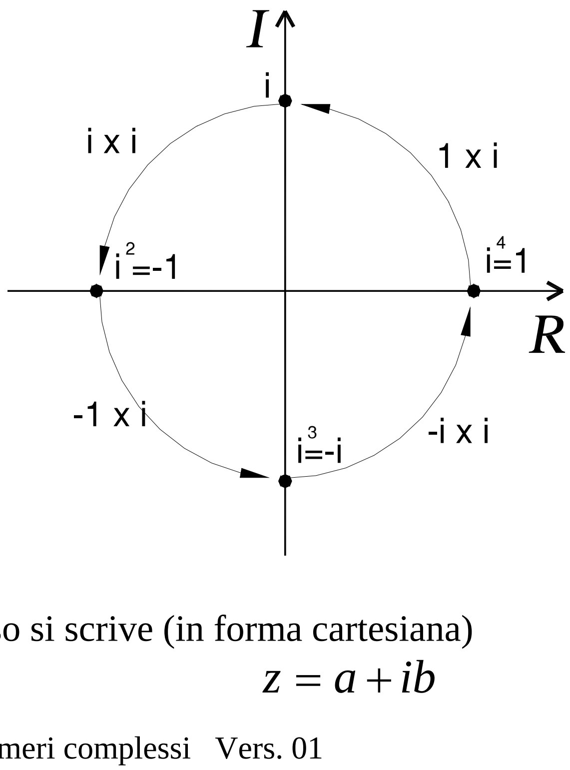


Figura 5

Il numero complesso si scrive (in forma cartesiana)

$$z = a + ib$$

Dove **a** è la parte reale e **b** il coefficiente della parte immaginaria.

La rappresentazione sul piano di Argand allora è

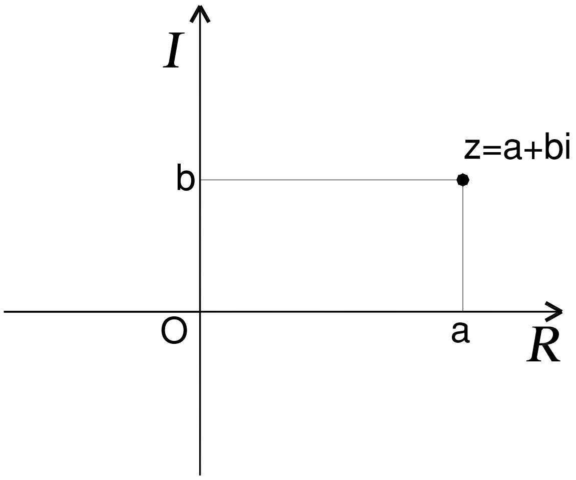


Figura 6

Il modulo di z indicato anche con ρ si ottiene applicando la regola di Pitagora così come il modulo di un vettore espresso mediante le componenti cartesiane:

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (1)$$

Nello stesso modo è possibile calcolare l'angolo θ che il modulo ρ del numero complesso forma con il semiasse positivo orizzontale (numeri reali)

$$\theta = \arctan\frac{b}{a} \qquad (2)$$

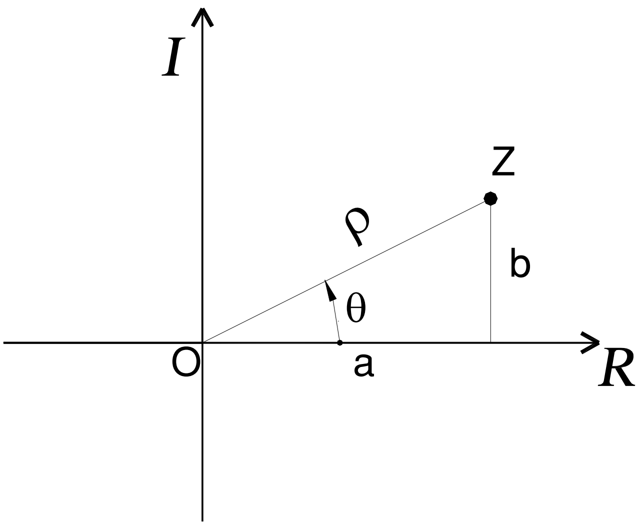


Figura 7

Moltiplicando un numero complesso per ***i*** se ne ottiene un altro ruotato di π/2 rispetto a quello iniziale

Esempio $z = 4 + 3i$

$$z \cdot i = (4 + 3i) \cdot i = 4i + 3i^2 = -3 + 4i$$

Dalla rappresentazione cartesiana è evidente che il prodotto $z \cdot i$ è ruotato di π/2 antiorario rispetto ad z

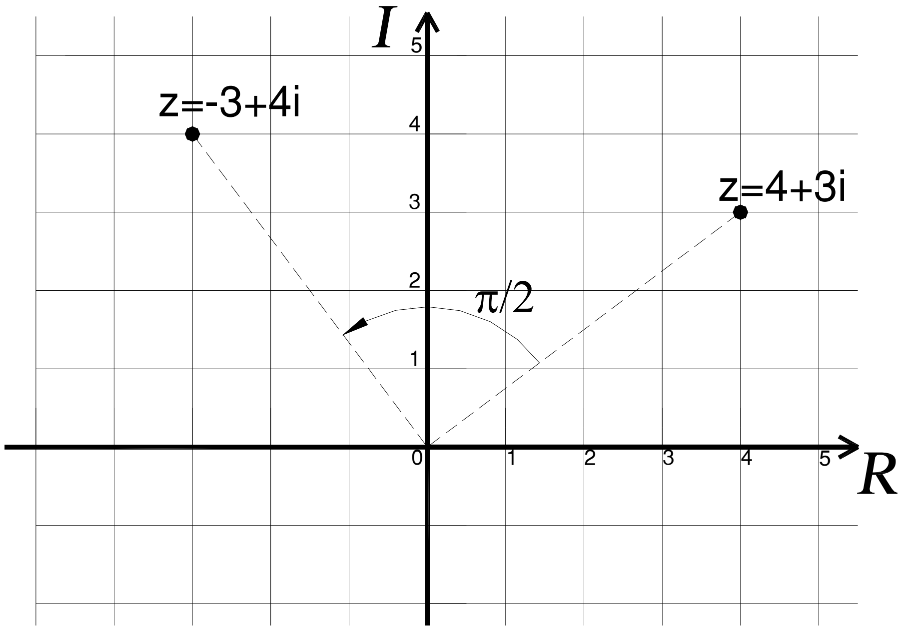


Figura 8

Utilizzando la notazione trigonometrica dei numeri complessi questo è maggiormente evidente.

Il numero complesso $z = a + ib$ espresso in forma trigonometrica è

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

dove ρ e θ sono ottenuti mediante le precedenti formule (1) e (2)

Il prodotto tra due numeri complessi

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \text{ e } z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

si ottiene con la formula $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$ (3)

La quantità immaginaria **i** si esprime come $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

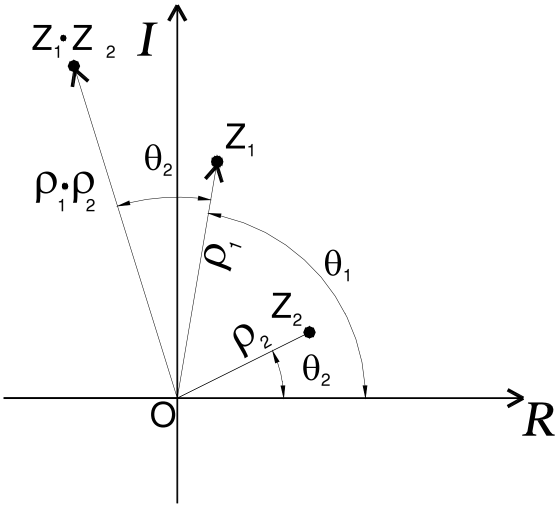
Moltiplicando un numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

per $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

si ottiene $z \cdot i = \rho\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$,

si vede chiaramente che il risultato del prodotto non è altro che il numero complesso iniziale ruotato di π/2 in senso antiorario

La formula (3) è suscettibile di una ulteriore **importante spiegazione** fondamentale nel proseguo. Infatti è possibile interpretare il prodotto di due numeri complessi considerando z_1 come un vettore con l'estremo iniziale nell'origine degli assi e quello finale in corrispondenza del numero complesso che venendo moltiplicando da z_2 modifica il suo modulo ρ_1 del fattore ρ_2 ed è ruotato di un angolo θ_2



Dalla figura si vede che il vettore z_1 quando è moltiplicato dal vettore z_2 modifica il valore del modulo e ruota dell'angolo θ_2
(Nota: il ragionamento vale anche quando ad essere ruotato è z_2)

Figura 9

Con queste premesse allora è possibile esprimere le impedenze in presenza di condensatori ed induttori: in elettrotecnica **per evitare confusioni con il simbolo della corrente l'unità immaginaria viene indicata con la lettera j**

Nello studio delle correnti alternate per poter comprendere meglio il fenomeno si utilizza il diagramma a *fasori* (pag. 49) in cui V_{max} ed I_{max} sono rappresentati come vettori rotanti con velocità di rotazione pari ad ω (la pulsazione della tensione alternata che alimenta il circuito).
I valori istantanei di V ed I sono le proiezioni sull'asse verticale del riferimento di V_{max} ed I_{max}

Circuito Induttivo
Nel circuito che presenta una in'induttanza L sappiamo dalla legge di Ohm che

$$V = X_L \cdot I = (\omega L) \cdot I$$

con la tensione V che **anticipa** la corrente I di $\pi/2$. (pag 59).
Il diagramma dei fasori è:

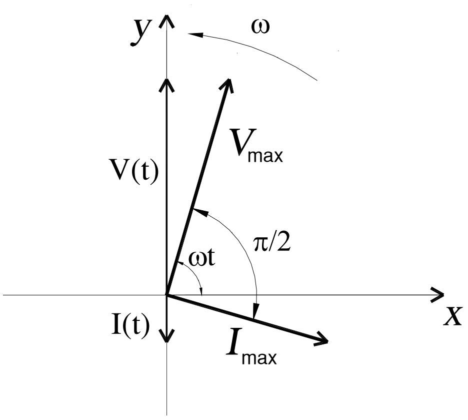


Figura 10

Considerando il piano di riferimento xy come se fosse il piano di Gauss cioè trattando sia V che I come numeri complessi possiamo esprimere il fatto che la tensione V anticipa la corrente I di π/2, moltiplicando la corrente I oltre che per il modulo di X_L anche per l'unità immaginaria ***j*** ovvero

$$V = \omega L \cdot I \cdot j$$

Inglobando l'unita immaginaria nella reattanza $V = (\omega Lj) \cdot I$ si ha in definitiva:

$$X_L = \omega Lj$$

Circuito Capacitivo

Nel circuito che presenta un condensatore C sappiamo dalla legge di Ohm che

$$V = X_C \cdot I = \left(\frac{1}{\omega C}\right) \cdot I$$

con la tensione V che **ritarda** sulla corrente I di π/2. (pag 55).

Il diagramma dei fasori è:

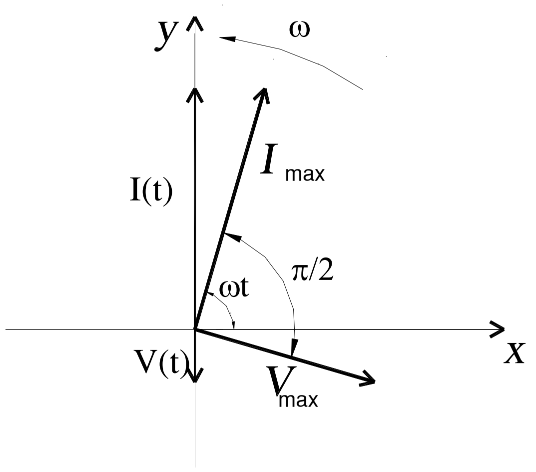


Figura 11

Come nel caso precedente trattando sia V che I come numeri complessi esprimiamo il fatto che la tensione V ritarda sulla corrente I la corrente I di π/2, moltiplicando la corrente I oltre che per il modulo di X_C anche per **-*j*** **(**con segno negativo perché si deve ottenere una rotazione oraria) si ha:

$$V = \frac{1}{\omega C} \cdot I \cdot (-j)$$

Inglobando l'unita immaginaria nella reattanza si ha

$V = \left(\frac{-j}{\omega C}\right) \cdot I$ per cui si ottiene $X_C = -\frac{j}{\omega C}$

Tuttavia si preferisce esprimere la reattanza capacitiva nel seguente modo

$$X_C = -\frac{j}{\omega C}\frac{j}{j} = \frac{-j^2}{\omega Cj} = \frac{-(-1)}{\omega Cj} \rightarrow X_C = \frac{1}{\omega Cj}$$

In conclusione le reattanze per condensatori ed induttanze si esprimono mediante i numeri complessi:

$$X_L = \omega L j \qquad X_C = \frac{1}{\omega C j}$$

Questa notazione delle Reattanze rende il calcolo delle impedenze più facile.

Riprendiamo in esame il circuito RLC in serie di cui già conosciamo il valore dell'impedenza.
Con l'utilizzo dei numeri complessi tutto ilo calcolo è più rapido.
I tre elementi sono disposti in serie perciò

$$Z_{equivalente} = \Sigma Z = R + X_L + X_C = R + \omega L j + \frac{1}{\omega C j}$$

Applicando le regole di calcolo dei numeri complessi

$$Z_{eq} = R + \omega L j + \frac{1}{\omega C j} \cdot \frac{j}{j} = R + \omega L j + \frac{j}{\omega C j^2} = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) j$$

Cioè Z è espresso mediante un **numero complesso** $z = a + jb$ con

$a = R$ e $b = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

Il modulo si calcola mediante la formula (1) e vale:

$$\boxed{|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

come già calcolato con altro metodo (pag. 63)

CALCOLO DELLO SFASAMENTO φ TRA LA TENSIONE e LA CORRENTE

I e V sono sfasati ma non di π/2 come nei circuiti elementari con solo condensatore e solo induttanza ma di un angolo $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$

Riprendiamo la legge in Ohm riscritta in forma generale $V = Z \cdot I$

Considerando Z ed I come numeri complessi e tenendo presente la formula di moltiplicazione tra due numeri complessi e con quanto detto in precedenza (figura 9) la tensione V risulta ruotata rispetto alla corrente I dall'impedenza Z.

Quanto vale questa rotazione?

Z è espresso nella forma $Z = \overline{R} + Xj$ dove $\overline{R}$ indica la parte reale dell'impedenza (e non la resistenza) ed X (detta Reattanza) il coefficiente della parte immaginaria quindi mediante la formula (2) possiamo esprimere l'angolo che V ed I formano

$$\varphi = \arctan \frac{X}{\overline{R}} \quad (4)$$

Se $\varphi > 0 \rightarrow \frac{X}{\overline{R}} > 0$ allora la tensione V precede I

Se $\varphi < 0 \rightarrow \frac{X}{\overline{R}} < 0$ allora la corrente I precede V

Risultato generale: Espressa l'impedenza come numero complesso lo sfasamento φ non è altro che l'arcotangente del rapporto tra le componenti immaginaria (reattanza X) e la componente reale dell'impedenza.

ATTENZIONE questi valori forniscono il valore dell'impedenza equivalente e dello sfasamento tra la tensione e la corrente che passa al generatore. Sui singoli rami bisogna ragionare localmente

Consideriamo ora il circuito composto da una resistenza R ed un condensatore di capacità C disposti in parallelo. Si ha

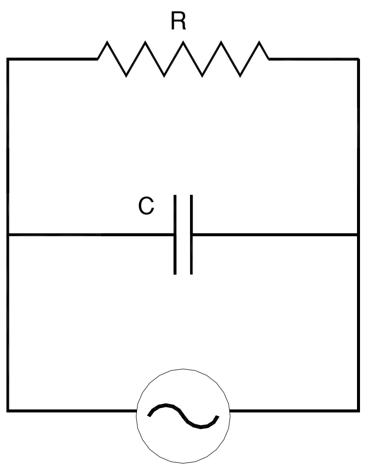


Figura 12

Si ha allora

$$z_1 = R$$

$$z_2 = X_C = \frac{1}{\omega Cj}$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \Sigma \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \omega Cj = \frac{1 + \omega RCj}{R} \rightarrow Z_{eq} = \frac{R}{1 + \omega RCj}$$

Ma la Z_{eq} va espressa per essere utilizzata proficuamente nella forma $z = a + jb$ quindi vanno applicato le tecniche di calcolo per i numeri complessi. Moltiplicando numeratore e denominatore per il *coniugato* del denominatore si ha

$$Z_{eq,TOTALE} = Z_{eq1/2} + Z3 = \frac{R}{1+\omega RCj}\cdot\frac{1-\omega RCj}{1-\omega RCj} = \frac{R-\omega R^2Cj}{1-\omega^2R^2C^2j^2} = \frac{R}{1+\omega^2R^2C^2} - \frac{\omega R^2C}{1+\omega^2R^2C^2}\,j$$

Il modulo di z vale

$$\left|Z_{eq}\right| = \sqrt{\frac{R^2}{\left(1+\omega^2R^2C^2\right)^2} + \frac{\omega^2R^4C^2}{\left(1+\omega^2R^2C^2\right)^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{\left(1+\omega^2R^2C^2\right)^2}\left(1+\omega^2R^2C^2\right)}$$

cioè

$$\boxed{\left|Z_{eq}\right| = \sqrt{\frac{R^2}{\left(1+\omega^2R^2C^2\right)}}}$$

Applicando la legge di Ohm è possibile ricavare la corrente I al generatore

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} \rightarrow I = V\cdot\frac{1}{Z_{eq}} = Z_{eq} = V\cdot\left(\frac{1}{R}+\omega Cj\right)$$

Lo sfasamento vale $\varphi = \arctan\frac{X}{R} = \dfrac{\dfrac{\omega R^2C}{1+\omega^2R^2C^2}}{\dfrac{R}{1+\omega^2R^2C^2}} = \arctan(\omega RC)$

$$\boxed{\varphi = \arctan(\omega RC)}$$

Consideriamo ora il circuito ① composto da R e C in parallelo disposto in serie con L

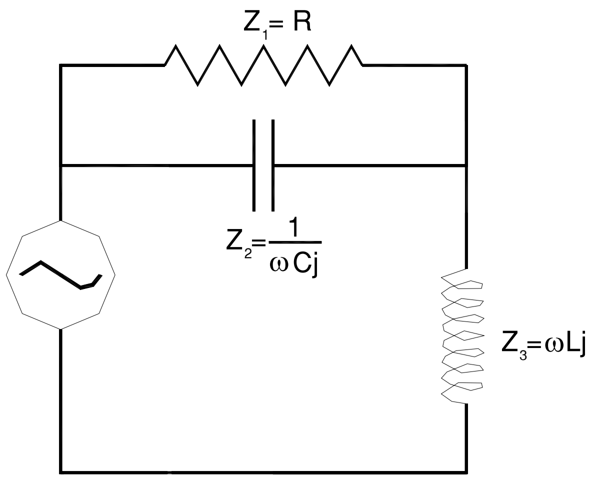


Figura 13

Per il parallelo tra Z1 e Z2 si può utilizzare il precedente risultato ottenuto per cui aggiungendo Z3 in serie

$$Z_{eq,TOTALE} = Z_{eq1/2} + Z_3 = \left(\frac{R}{1+\omega^2 R^2 C^2} - \frac{\omega R^2 C}{1+\omega^2 R^2 C^2}\, j \right) + \omega L j$$

da cui
$$\boxed{Z_{eq,TOTALE} = \frac{R}{1+\omega^2 R^2 C^2} + \omega\left(L - \frac{R^2 C}{1+\omega^2 R^2 C^2} \right) j}$$

Ovviamente il calcolo del modulo di Z si fa con la medesima formula precedente anche se il risultato diventa estremamente ingombrante.
Ed è possibile calcolare lo sfasamento sfruttando la relazione sulle componenti dell'impedenza

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} = \arctan = \frac{\omega\left(L - \frac{R^2 C}{1+\omega^2 R^2 C^2} \right)}{\frac{R}{1+\omega^2 R^2 C^2}} = \arctan\frac{\omega\left(L + \omega^2 L R^2 C^2 - R^2 C \right)}{R}$$

Era più rapido ragionare partendo dalle singole impedenze

$$Z_{eq,TOTALE} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_3 = \frac{R\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} + \omega L j$$ svolgendo i calcoli

$$Z_{eq,TOTALE} = \frac{\frac{R}{j\omega C}}{\frac{Rj\omega C + 1}{j\omega C}} + \omega L j = \frac{R}{Rj\omega C + 1} + \omega L j = \frac{R}{Rj\omega C + 1} \cdot \frac{1 - Rj\omega C}{1 - Rj\omega C} + \omega L j =$$

$$= \frac{R - R^2 j\omega C}{1 + R^2\omega^2 C^2} + \omega L j = \frac{R}{1+\omega^2 R^2 C^2} + \omega\left(L - \frac{R^2 C}{1 + R^2\omega^2 C^2} \right) j$$

Consideriamo ora il circuito ② composto da L e C in parallelo disposto in serie con R

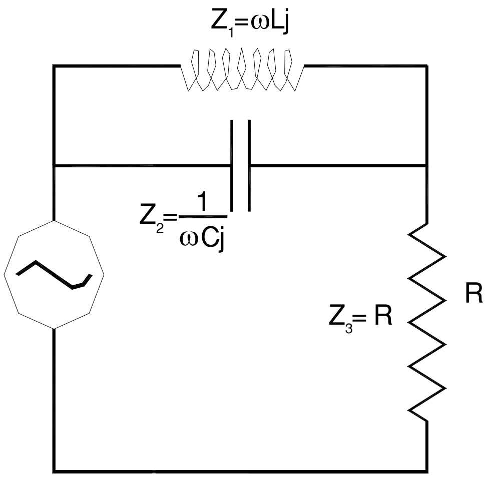


Figura 14

Possiamo ragionare velocemente

$$Z_{eq,TOTALE} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_3 = \frac{j\omega L \dfrac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} + R \rightarrow \frac{\dfrac{L}{C}}{\dfrac{j^2\omega^2 LC + 1}{j\omega C}} + R = \frac{\omega Lj}{1-\omega^2 LC} + R$$

$$\boxed{Z_{eq,TOTALE} = R + \frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}\, j}$$

Modulo $\left|Z_{eq}\right| = \sqrt{R^2 + \dfrac{\omega^2 L^2}{\left(1-\omega^2 LC\right)^2}}$

Sfasamento $\varphi = \arctan\dfrac{b}{a} = \arctan\dfrac{\dfrac{\omega L}{1-\omega^2 LC}}{R} = \arctan\dfrac{\omega L}{R\left(1-\omega^2 LC\right)}$

con $\varphi > 0$ se $1 - \omega^2 \mathrm{LC} > 0$

A questo punto possiamo ampliare i casi, ad esempio

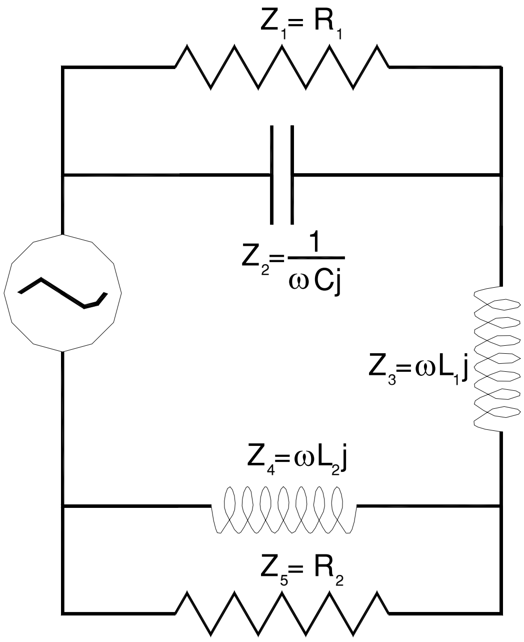


Figura 15

Applichiamo le regole di composizione delle impedenze:

$$Z_{eq,TOTALE} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_3 + \frac{Z_4 \cdot Z_5}{Z_4 + Z_5}$$

$$Z_{eq,TOTALE} == \frac{R_1 \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} + j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \cdot R_2}{j\omega L_2 + R_2} = \frac{R_1}{j\omega R_1 C + 1} + j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \cdot R_2}{j\omega L_2 + R_2}$$

Applicando alle frazioni il coniugato del denominatore

$$Z_{eq,TOTALE} = \frac{R_1}{j\omega R_1 C + 1} \cdot \frac{1 - j\omega R_1 C}{1 - j\omega R_1 C} + j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \cdot R_2}{j\omega R_2 C + 1} \cdot \frac{1 - j\omega R_2 C}{1 - j\omega R_2 C} =$$

$$= \frac{R_1 - \omega R_1^2 Cj}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2} + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_2 \cdot R_2^2 C + \omega L_2 R_2 j}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2}$$

Ed infine

$$\boxed{Z_{eq,TOTALE} = \left(\frac{R_1}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2} + \frac{\omega^2 L_2 \cdot R_2^2 C}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2} \right) + \left(\omega L_1 - \frac{R_1^2 C}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2{}_1} + \frac{\omega L_2 R_2 j}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2} \right) j}$$

Buon divertimento per il calcolo del modulo e dello sfasamento tra corrente e tensione al generatore sempre applicando le formule precedenti.

E ci possiamo sbizzarire

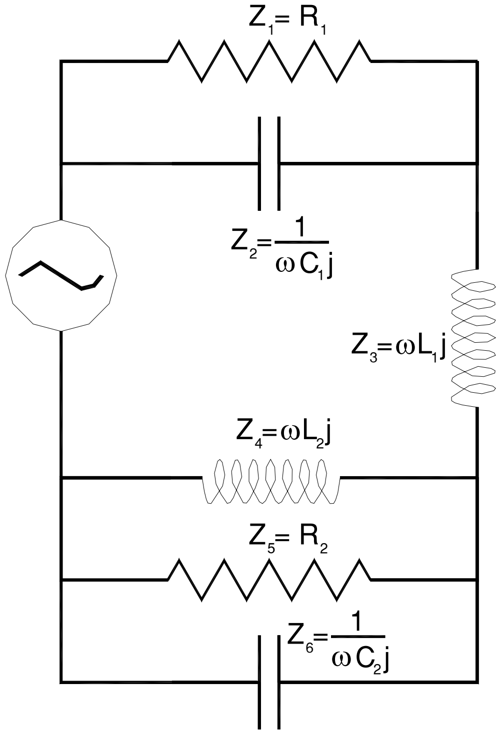


Figura 16

Per le impedenze in parallelo Z_4, Z_5 e Z_6 vale:

$$\frac{1}{Z_{equivalente=4/5/6}} = \Sigma\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_6} = \frac{Z_5 \cdot Z_6 + Z_4 \cdot Z_6 + Z_4 \cdot Z_6}{Z_4 \cdot Z_{5\cdot} \cdot Z_6 Z_4 \cdot Z_5 + Z_4 \cdot Z_6 + Z_5 \cdot Z_4} \rightarrow$$

$$\rightarrow Z_{equivalente=4/5/6} = \frac{Z_4 \cdot Z_{5\cdot} \cdot Z_6}{Z_4 \cdot Z_5 + Z_4 \cdot Z_6 + Z_5 \cdot Z_4}$$

Per cui la formula generale dell'impedenza equivalente per il circuito di figura 16 risulta:

$$\boxed{Z_{eq,TOTALE} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_3 + \frac{Z_4 \cdot Z_{5\cdot} \cdot Z_6}{Z_4 \cdot Z_5 + Z_4 \cdot Z_6 + Z_5 \cdot Z_4}}$$

Tuttavia il calcolo delle tre impedenze in parallelo conviene farlo direttamente

$$\frac{1}{Z_{equivalente=4/5/6}} = \frac{1}{\omega L_2 j} + \frac{1}{R_2} + \omega C_2 j = \frac{R_2 + \omega L_2 j - \omega^2 L_2 R_2 C_2}{\omega L_2 R_2 j} \rightarrow$$

$$Z_{equivalente=4/5/6} = \frac{\omega L_2 R_2 j}{R_2 + \omega L_2 j - \omega^2 L_2 R_2 C_2}$$

moltiplicando per il coniugato del denominatore

$$Z_{equivalente=4/5/6} == \frac{\omega L_2 R_2 j}{R_2 + \omega L_2 j - \omega^2 L_2 R_2 C_2} \cdot \frac{R_2 - \omega^2 L_2 R_2 C_2 - \omega L_2 j}{R_2 - \omega^2 L_2 R_2 C_2 - \omega L_2 j}$$

Si ha infine per le tre impedenze in parallelo:

$$\boxed{Z_{equivalente=4/5/6} = \frac{\omega^2 L_2^2 R_2 + \omega L_2 R_2^2 \left(1-\omega^2 L_2 C_2\right) j}{R_2^2 \left(1+\omega^2 L_2 C_2\right)^2 + \omega^2 L_2^2}}$$

Ovviamente questa soluzione parziale del circuito di figura 16 è direttamente applicabile anche nel caso siano presente SOLO le tre impedenze R, C ed L parallelo

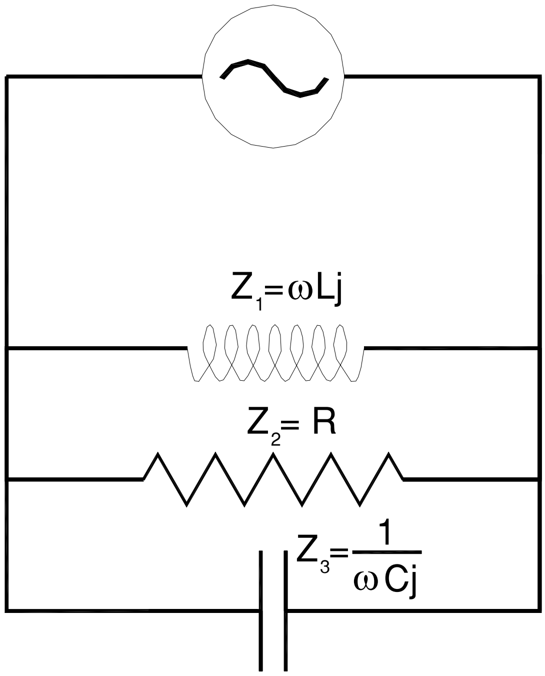


Figura 17

$$\boxed{Z_{\text{equivalente RCL in parallelo}} = \frac{\omega^2 L^2 R + \omega L R^2 \left(1-\omega^2 LC\right) j}{R^2 \left(1+\omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 L^2}}$$

Riprendiamo in esame l'impedenza del circuito di figura 16

$$Z_{eq,TOTALE} == \frac{R_1 \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_2^2 R_2 + \omega L_2 R_2^2 \left(1-\omega^2 L_2 C_2\right) j}{R_2^2 \left(1+\omega^2 L_2 C_2\right)^2 + \omega^2 L_2^2} =$$

$$= \frac{R_1}{j\omega R_1 C + 1} + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_2^2 R_2 + \omega L_2 R_2^2 \left(1-\omega^2 L_2 C_2\right) j}{R_2^2 \left(1+\omega^2 L_2 C_2\right)^2 + \omega^2 L_2^2} =$$

$$= \frac{R_1 - \omega R_1^2 C j}{1+\omega^2 R_1^2 C^2} + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_2^2 R_2 + \omega L_2 R_2^2 \left(1-\omega^2 L_2 C_2\right) j}{R_2^2 \left(1+\omega^2 L_2 C_2\right)^2 + \omega^2 L_2^2}$$ ....*continua*