Equazioni Differenziali

Guida all'impostazione di una equazione differenziale

Premessa

Con equazione differenziale in analisi si intende una equazione dove l'incognita è una funzione e nell'equazione è presente sia la stessa funzione incognita sia le sue derivate di qualsiasi ordine di derivazione (derivata prima, derivata seconda ecc). Esiste una ampia casistica di eq diff. e vengono catalogate in base all'ordine massimo della derivata che compare. Dunque se compare una derivata seconda parleremo di eq. Diff. del SECONDO ordine ecc.

Poiché è molto ampia la varietà di eq diff che sono state studiate da molti matematici e fisici (vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_differenziale) nella scuola superiore si studiano solo i casi più elementari. Per la risoluzione delle equazioni differenziali consultare il manuale Zanichelli pagina 2093 per le seguenti tipologie:

Equazioni differenziali a variabili separabili

Equazioni diff. lineari del primo ordine omogenea $y'+a(x)\cdot y=0$ e completa $y'+a(x)\cdot y=b(x)$

Equazioni diff. lineari del secondo ordine a coefficienti costanti $y''+by'+cy=r(x)$

In questa guida invece ci si occupa dell'impostazione di una equazione differenziale a partire da una situazione reale.

Esempi svolti

1. Crescita popolazione batteri
2. Scambio termico
3. Svuotamento vasca
4. Colonna modello
5. Circuito RC in CC
6. Circuito RL in CC
7. Decadimento Radioattivo

In preparazione

8. Circuito RLC in CC
9. Circuito RC in CA
10. Circuito RL in CA

1	CRESCITA POPOLAZIONE
Testo	***Una colonia di batteri si riproduce aumentando del 10% nell'unità di tempo. Stimare la massa iniziale dei batteri sapendo che tra il quarto e il quinto giorno la massa complessiva è aumentata di 4 grammi***

Impostazione	Scegliendo come funzione la “numerosità” dei batteri in funzione del tempo t (che viene espresso in giorni) ovvero *n(t)* abbiamo che l’incremento per unità di tempo (quindi per ogni giorno) è $$n(t+1)-n(t)=0{,}1\cdot n(t)$$ che scritta in termini di variazioni infinitesimali risulta essere $$n'(t)=0{,}1\cdot n(t)$$ equazione differenziale a variabili separabili
Risoluzione	$$\frac{dn}{dt}=0{,}1\cdot n(t)\rightarrow\frac{dn}{n(t)}=0{,}1\cdot dt\rightarrow\int\frac{dn}{n(t)}=\int 0{,}1\cdot dt\rightarrow$$ $$\rightarrow\ln(n)=0{,}1t+c\rightarrow n=\pm e^{0{,}1t}\cdot e^{c}\rightarrow n=k\cdot e^{0{,}1t}$$ Per calcolare il valore della costante k si utilizza l’informazione all’aumento di massa tra il quarto e il quinto giorno indicando con δ la massa di un singolo batterio $$n(5)=k\cdot e^{0{,}50}$$ $$n(4)=k\cdot e^{0{,}40}$$ Risulta che la variazione di numerosità $\Delta n=n(5)-n(4)=k(e^{0{,}50}-e^{0{,}40})$ L’aumento della massa è $\Delta m=\delta\cdot k(e^{0{,}50}-e^{0{,}40})$ che deve risultare pari a 4 grammi $$\delta\cdot k(e^{0{,}50}-e^{0{,}40})=4\rightarrow k=\frac{4}{\delta\cdot(e^{0{,}50}-e^{0{,}40})}$$ L’equazione della numerosità assume l’aspetto $n(t)=\frac{4}{\delta\cdot(e^{0{,}50}-e^{0{,}40})}e^{0{,}1t}$ La massa iniziale m_0 è $\delta\cdot n(0)$ ovvero $$m_0=\delta\frac{4}{\delta\cdot(e^{0{,}50}-e^{0{,}40})}e^{0}=\frac{4}{(e^{0{,}50}-e^{0{,}40})}\approx 25{,}49\text{ grammi}$$

2	SCAMBIO TERMICO
Testo	***Un liquido che si trova alla temperatura di 25 °C viene esposto in un ambiente che si trova a 4 °C. Dopo 10 minuti di esposizione la sua temperatura è di 20 °C. A che tempo t si troverà a 7 °C?***

<table>
<tr><td>Impostazione</td><td>

La temperatura T dell’oggetto è funzione del tempo t ovvero $T = T(t)$

Posto a contatto con l’ambiente esterno la temperatura dell’oggetto diminuisce la sua temperatura in modo proporzionale (coefficiente di scambio termico k) alla differenza di temperatura con l’ambiente esterno.

$$(\Delta T)_{oggetto} = k\left[T_{oggetto}) - T_{ambiente}\right]$$

Durante lo scambio termico ovviamente la differenza si temperatura va a diminuire perché oggetto ed ambiente esterno vanno in equilibrio termico. Il liquido DIMINUISCE la sua temperatura mentre la temperatura dell’aria dell’ambiente esterno tenderebbe ad aumentare MA per via della grande capacità termica dell’ambiente esterno ciò non avviene e la temperatura esterna rimane pertanto costante.

La legge che descrive il fenomeno è la seguente

$$\frac{dT}{dt} = -k\left[T(t) - T_{ambiente}\right]$$

</td></tr>
<tr><td>Risoluzione</td><td>

E’ una eq. diff. a variabili separabili

$$\frac{dT}{dt} = -k\left[T(t) - 4\right] \to \frac{dT}{T-4} = -kdt \to \int \frac{dT}{T-4} = -\int kdt \to \ln(T-4) = -kt + c$$

Da cui

$$T - 4 = e^{-kt+c} \to T = e^{c}e^{-kt} + 4 \to T = \beta e^{-kt} + 4$$

Determinazione della costante di integrazione β e della costante di scambio termico K

$$T(0) = 25 \to 25 = \beta \cdot e^{0} + 4 \to \beta = 21$$

Si ha che $T(t) = 21 \cdot e^{-kt} + 4$

$$T(10) = 20 \to 20 = 21 \cdot e^{-10k} + 4 \to e^{-10k} = \frac{16}{21}$$

$$\to -10k = \ln\frac{16}{21} \to k = -\frac{1}{10}\ln\frac{16}{21} = \frac{1}{10}\ln\frac{21}{16} \cong 0{,}0272$$

L’equazione completa allora è $T(t) = 21 \cdot e^{-\frac{1}{10}\ln\frac{21}{16}t} + 4$

Si vuole sapere quanto tempo occorre per raggiungere la temperatura di 7 °C.

Si deve risolvere l’equazione

$$7 = 21 \cdot e^{-\frac{1}{10}\left(\ln\frac{21}{16}\right)t} + 4$$

$$e^{-\frac{1}{10}\left(\ln\frac{21}{16}\right)t} = \frac{1}{7}$$

$$-\frac{1}{10}\left(\ln\frac{21}{16}\right)t = \ln\frac{1}{7} \to \left(\ln\frac{21}{16}\right)t = 10\ln 7$$

$$t = 10\frac{\ln 7}{\ln 21 - \ln 16} \cong 72$$

Soluzione 72 minuti

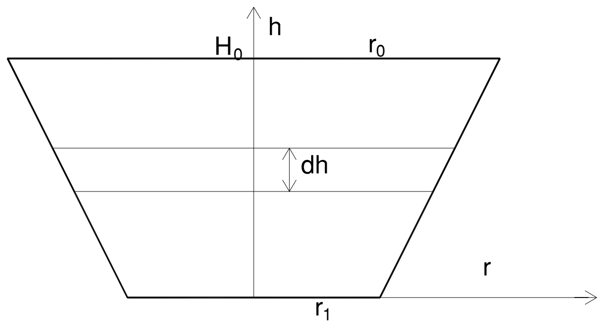
</td></tr>
</table>

3	SVUOTAMENTO VASCA

Testo	***Un serbatoio cilindrico è pieno fino ad un livello di 5,00 metri di acqua. Sulla parete laterale c'è un foro ad un altezza di 50 cm dal fondo della vasca. Determinare la velocità di fuoriuscita dell'acqua.***
Impostazione	Vale la legge di Torricelli $v=\sqrt{2g\Delta h}$ che però puo essere applicata solo considerando la vasca a grande capacità cioè Δh è ritenuta costante. In caso di mancanza di questa ipotesi Δh diminuisce al variare del tempo e di conseguenza anche la velocità di deflusso. Indicando con: h(t) l'altezza del serbatoio al di sopra del foro di uscita funzione del tempo t A l'area di base del serbatoio A h(t) il volume di acqua nel serbatoio a l'area del foro di uscita la portata in uscita dal serbatoio è $Q=a\cdot v=a\sqrt{2gh(t)}$ Poiché il serbatoio si svuota dobbiamo scrivere che la variazione infinitesimale di volume dV d'acqua nel serbatoio è uguale alla portata nel tempo dt $$dV=Q\cdot dt$$ $$A\cdot dh=-a\sqrt{2gh(t)}\cdot dt$$ Il segno della variazione è negativo perché il volume diminuisce nel tempo

Risoluzione	E' una equazione differenziale a variabili separabili $$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\cdot dt$$ Integrando $2\sqrt{h} = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\cdot t + k \rightarrow h(t) = \frac{1}{4}\left(-\frac{a\sqrt{2g}}{A}\cdot t + k\right)^2$ Per calcolare la costante k per t=0 l'altezza (intesa come differenza tra la superficie libera e il foro) è H_0 $$H_0 = \frac{1}{4}(k)^2 \rightarrow k = 2\sqrt{H_0}$$ L'equazione diventa $h(t) = \left(-\frac{a\sqrt{2g}}{2A}\cdot t + \sqrt{H_0}\right)^2$ (andamento parabolico) La velocità di deflusso vale $$v(t) = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\left(-\frac{a\sqrt{2g}}{2A}\cdot t + \sqrt{H_0}\right)^2} = \sqrt{2g}\left(-\frac{a\sqrt{2g}}{2A}\cdot t + \sqrt{H_0}\right)$$ Ed infine $v(t) = -\frac{a\cdot g}{A}t + \sqrt{2gH_0}$ (andamento lineare per t=0 si ha naturalmente $v = \sqrt{2gH_0}$) Nel caso di questo esercizio H_0 =4,5 metri: è possibile calcolare il tempo di svuotamento (ovviamente fino al livello del foro di uscita): ponendo l'altezza uguale a zero $$0 = \left(-\frac{a\sqrt{2g}}{2A}\cdot t + \sqrt{H_0}\right)^2 \rightarrow \frac{a\sqrt{2g}}{2A}\cdot t = \sqrt{H_0} \rightarrow t = \frac{2A}{a}\sqrt{\frac{H_0}{2g}} \rightarrow t = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}$$ Oviamente si ha lo stesso risultato ponendo la velocità di deflusso pari a zero $$0 = -\frac{a\cdot g}{A}t + \sqrt{2gH_0} \rightarrow t = \frac{A}{a\cdot g}\sqrt{2gH_0} \rightarrow t = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}$$ Considerando $A=\pi\cdot 5^2\ m^2$ e $a=\pi\cdot 0{,}05^2\ m^2$ $$t = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{2H_0}{g}} = \frac{\pi\cdot 5^2}{\pi\cdot 0{,}05^2}\cdot\sqrt{\frac{2\times 4{,}50}{9{,}8}} = 9583\,\mathrm{s} \approx 2^{\mathrm{h}}40^{m}$$

Il problema diventa più complesso se il serbatoio anziché cilindrico è tronco-conico come avviene nella realtà. Vedi figura:



In questo caso l'area di base varia con la profondità

$$dV = A(h) \cdot dh = \pi \cdot [r(h)]^2 \cdot dh$$

Il raggio è in funzione della geometria $r(h) = \frac{r_0 - r_1}{H_0} h + r_1$ pertanto

$$dV = \pi \cdot \left[\frac{r_0 - r_1}{H_0} h + r_1 \right]^2 \cdot dh$$

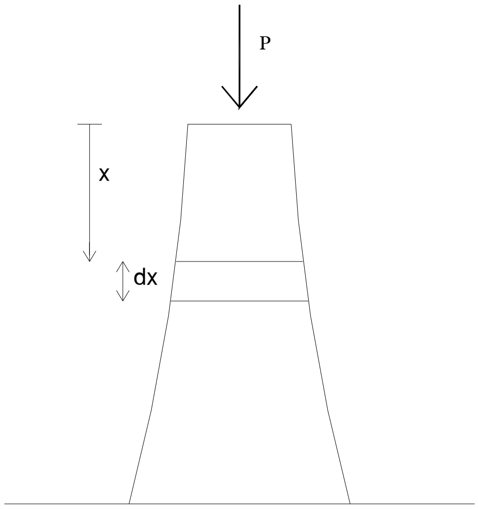
Riprendendo l'equazione differenziale che esprime la variazione infinitesimale del volume come portata di deflusso nel tempo dt $dV = Q \cdot dt$ si ha

$$\pi \cdot \left[\frac{r_0 - r_1}{H_0} h + r_1 \right]^2 \cdot dh = a\sqrt{2gh(t)} \cdot dt$$

Da cui $\frac{\left[\frac{r_0 - r_1}{H_0} h + r_1 \right]^2}{\sqrt{h}} dh = \frac{a}{\pi} \sqrt{2g} \cdot dt$ la cui integrazione è difficoltosa

4	COLONNA MODELLO
Testo	***Stabilire il profilo di una colonna in modo che abbia una resistenza uniforme con un carico verticale sulla sommità F assegnato.***
Impostazione	In Scienza delle Costruzioni si definisce come tensione normale (σ) il rapporto tra la forza perpendicolare ad una superficie e l'area stessa $$\sigma = \frac{F}{A}$$ In pratica è la stessa definizione utilizzata per la pressione solo che il termine "pressione" è riservato ai fluidi mentre per i solidi la grandezza prende il nome di "tensione" e si misura sempre in Pascal. Nei solidi la forza generalmente non è perpendicolare alla superficie, in questo caso la forza viene scomposta in due componenti, la prima perpendicolare alla superficie dando appunto luogo alla tensione normale σ mentre la seconda è tangenziale alla superficie e da luogo alla tensione tangenziale (τ) $$\tau = \frac{F_{//}}{A}$$ Nel caso di una colonna (pilastro) sottoposta ad una azione verticale F sulla sua sommità si hanno al suo interno solamente tensioni normali. Ogni materiale ha una sua tensione massima di sicurezza σ_{max} a cui può essere sottoposta (che comunque è sensibilmente inferiore [1] alla tensione che produce la rottura del materiale) quindi quando si stabiliscono le dimensioni della sezione della colonna si ragiona sulla sezione alla base del pilastro dove la forza agente è data dalla somma dell'azione sommitale più il peso proprio della colonna cioè si fa in modo che la tensione alla base sia uguale proprio alla σ_{max} . Ovvero indicando con P il peso del pilastro si ha $$\frac{F+P}{A} = \sigma_{\max} \rightarrow A = \frac{F+P}{\sigma_{\max}}$$ Ma in questo modo la tensione sulla sommità della colonna è inferiore a σ_{max} infatti: $$\sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{F+P}{\sigma_{\max}}} = \frac{F}{F+P}\sigma_{\max} < \sigma_{\max}$$ Per la sezione intermedie la tensione normale è sempre inferiore a σ_{max} e ciò comporta che parte del materiale che compone la colonna è sfruttato al di sotto delle sue possibilità pertanto l'obiettivo è ottimizzare la geometria della colonna in modo che in ogni sezione della colonna la tensione risulti quella massima possibile. Pertanto con un carico verticale F la sezione di testa della colonna ha un'area pari a A_0 in modo tale che risulti $A_0 = \frac{F}{\sigma_0}$. Con $\sigma_0 \leq \sigma_{\max}$

Per l’andamento dell’area si fa in riferimento alla seguente figura



Nella sezione x l’area vale A(x) mentre nella sezione x+dx l’area vale A(x)+dA(x)

Ora si ha che l’incremento **infinitesimale** di volume tra le sezioni x e x+dx vale Adx
Questo aumento di volume aumenta il carico sopportato dalla sezione x+dx e vale (indicando con γ il peso per unità di volume) **γAdx**
Questo aumento deve essere assorbito dalla variazione infinitesimale che l’area subisce in modo che la tensione sulla sezione rimanga costantemente σ_0 ovvero deve valere la relazione: $\sigma_0 \cdot dA = \gamma \cdot A(x) \cdot dx$

Risoluzione

E’ una equazione differenziale a variabili separabili

$$\frac{dA}{A(x)} = \frac{\gamma}{\sigma_0} \cdot dx$$

$$\ln A = \frac{\gamma}{\sigma_0} x + c \quad \text{da cui} \quad A(x) = e^c \cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma_0} x}$$

con la condizione iniziale che per x=0 l’area vale $A = A_0 = \frac{F}{\sigma_0}$

si ha $A_0 = e^c \cdot e^0 \rightarrow e^c = A_0 = \frac{F}{\sigma_0}$

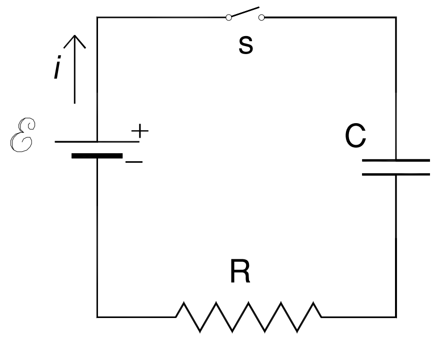
l’equazione è $A(x) = \frac{F}{\sigma_0} \cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma_0} x}$

Quindi l’area aumenta dalla testa alla base della colonna con legge esponenziale. La sezione ottimale per le colonne è quella circolare quindi il raggio della sezione vale

$$r(x) = \sqrt{\frac{F}{\pi \sigma_0} \cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma_0} x}}$$

	Esempio numerico. Carico in sommità 200.000 Newton (prodotto da circa 20 t) $\sigma_{\max} = 1\,Mpa$ $\gamma = 25000\ \frac{N}{m^3}$ H = 50,0 m Si ha che in sommità della colonna $A_{0,\min} = \frac{F}{\sigma_{\max}} = \frac{200000}{1000000} = 0{,}2\ \mathrm{m}^2 = 2000\ \mathrm{cm}^2$ Considerando una sezione circolare di raggio 30 cm l'area è di 0,2826 m^2 per cui $$\sigma_0 = \frac{200000}{0{,}2826} = 707714\ \mathrm{Pa} \approx 0{,}708\ \mathrm{Mpa} < \sigma_{\max}$$ L'equazione del raggio si specializza in $$r(x) = \sqrt{\frac{200000}{\pi \cdot 707714} \cdot e^{\frac{25000}{707714}x}}$$ Alla base della colonna x=50 metri si ha $r(50) = \sqrt{\frac{200000}{\pi \cdot 707714} \cdot e^{\frac{25000}{707714}\cdot 50}} = 0{,}72\ \mathrm{m}$ ooooooooooooooo Conseguenze: il profilo ottimizzato della colonna comportando un minor volume della colonna ha per conseguenza benefica 1. minor uso di materiale da costruzione, 2. una fondazione minore 3. minori sollecitazioni sul terreno La Torre Eiffel segue lo stesso principio della colonna modello anche se questa poi deve essere in grado di resistere anche all'azione orizzontale del vento. La presenza del vento modifica l'equazione differenziale. In effetti la Torre Eiffel rispetto alle necessità risulta sovradimensionata ma all'epoca l'ingegner Gustave Eiffel non avendo a disposizione adeguati strumenti di calcolo preferì aumentare precauzionalmente le misure.

5	CIRCUITO RC in CC
Testo	***In un circuito in corrente continua stabilire l'andamento della corrente al variare del tempo.*** ***Calcolare il tempo necessario perché la corrente si riduca all'1% del valore iniziale.***

Impostazione	Nel circuito di figura sono presenti un condensatore C ed una resistenza R. Inizialmente l'interruttore s è aperto e il condensatore è scarico. Chiudendo l'interruttore s nel circuito si manifesta la corrente i=$\mathcal{E}$/R nel verso indicato ma contemporaneamente sul condensatore la carica accumulata comincia a fornire una tensione opposta a quella di $\mathcal{E}$.  Scrivendo l'equazione della maglia si ha $$\mathcal{E}-\frac{q}{C}-R\cdot i=0$$ Poiché sul condensatore la relazione tra tensione e carica è $\Delta V=\frac{q}{C}$ Nella equazione compaiono due grandezze la **q** ovvero quantità di carica sul condensatore C e la corrente **i** che risultano dipendenti dal tempo. Inoltre la corrente i e la quantità di carica sono collegate dalla relazione $i=\frac{dq}{dt}$ ovvero la corrente è la derivata rispetto al tempo della quantità di carica q. L'equazione allora diventa una equazione differenziale $$\mathcal{E}-\frac{q}{C}-R\cdot\frac{dq}{dt}=0$$

Risoluzione

L'equazione è del tipo lineare del primo ordine completa $y' + a(x)\cdot y = b(x)$

La riscriviamo così $$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = \frac{\mathcal{E}}{R} \qquad (1)$$

Per la risoluzione si considera il procedimento illustrato a pagina 2094

Si considera dapprima la corrispondente equazione associata $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0$

Che è del tipo a variabili separabili $\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q \rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$

Integrando $$\ln q = -\frac{1}{RC} t + c \rightarrow q = e^c \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Posto $e^c = k$ si ha $q = k \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$

Il coefficiente k viene considerato variabile (metodo di Lagrange) k=k(x) pertanto

l'equazione generale risulta $q = k(t)\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$

Derivando rispetto al tempo si ha

$$\frac{dq}{dt} = k' \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + k \cdot \left(-\frac{1}{RC} \right) e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Riprendendo l'equazione completa (1) e sostituendo risulta

$$k' \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + k \cdot \left(-\frac{1}{RC} \right) e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{1}{RC} k \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{\mathcal{E}}{R} \rightarrow k' = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{\frac{1}{RC}t}$$

Integrando $k = \frac{\mathcal{E}}{R}(RC) e^{\frac{1}{RC}t} + c_2 = C\mathcal{E} e^{\frac{1}{RC}t} + c_2$

Per cui si ha $q = \left[C\mathcal{E} \cdot e^{\frac{t}{RC}} + c_2 \right] \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

Ora si deve determinare la costante c_2. All'istante iniziale t=0 la carica sul condensatore è nulla

$$0 = \left[C\mathcal{E} \cdot e^0 + c_2 \right] \cdot e^0 \rightarrow c_2 = -C\mathcal{E}$$

Finalmente abbiamo l'equazione

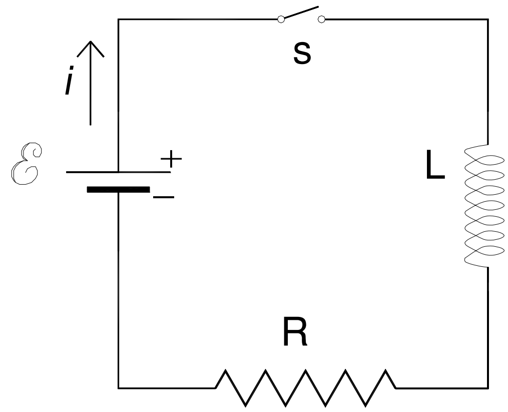
$$q = \left[C\mathcal{E} \cdot e^{\frac{t}{RC}} - C\mathcal{E} \right] \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow q = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

Il prodotto RC viene indicata con la lettera τ e viene denominata costante di tempo del circuito

$$q = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

	Inoltre $$i = \frac{dq}{dt} = C\mathcal{E}\left(-\frac{1}{\tau}\right)\left(-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{C\mathcal{E}}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$ La corrente per t=0 vale $i_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{R}$ e decresce esponenzialmente. Per t→∝ la corrente si annulla. Determiniamo quando ragionevolmente la corrente si può considerare nulla cioè praticamente all'1% del valore massimo $\frac{i_{\max}}{100} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ ovvero $$\frac{1}{100}\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow \frac{1}{100} = e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow \ln\frac{1}{100} = -\frac{t}{\tau} \rightarrow t = \tau\ln 100 \rightarrow t \cong 4{,}60\cdot\tau$$ Per R=1000 Ω e C=1000 μF la costante del circuito vale τ=0,001 s $\rightarrow t \cong 0{,}0046$ s

6	CIRCUITO RL in CC
Testo	***In un circuito RL in corrente continua stabilire l'andamento della corrente al variare del tempo.*** ***Calcolare il tempo necessario perché la corrente raggiunga il 99% del valore massimo.***

Impostazione	Nel circuito di figura sono presenti un induttore L ed una resistenza R. Inizialmente l'interruttore s è aperto, al momento della chiusura dell'interruttore la corrente comincia a circolare nel verso di figura ma nell'induttore si crea per la legge di Faraday una tensione opposta pari a $\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}$ che si oppone alla variazione di corrente nel circuito riuscendo inizialmente ad azzerarla totalmente.  Scrivendo l'equazione della maglia si ha $$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} - R \cdot i = 0$$ Nella equazione compare la corrente (dipendente dal tempo t) e la sua derivata prima quindi è una equazione differenziale

Risoluzione

L'equazione è del tipo lineare del primo ordine completa $y'+a(x)\cdot y=b(x)$

La riscriviamo così $$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}\cdot i=\frac{\mathcal{E}}{L} \qquad (1)$$

Per la risoluzione si considera il procedimento illustrato a pagina 2094

Si considera dapprima la corrispondente equazione associata $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}\cdot i=0$

Che è del tipo a variabili separabili $\frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}i \rightarrow \frac{di}{i}=-\frac{R}{L}t$

Integrando $$\ln i=-\frac{R}{L}t+c \rightarrow q=e^{c}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Posto $e^{c}=k$ si ha $i=k\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

Il coefficiente k viene considerato variabile (metodo di Lagrange) k=k(x) pertanto

l'equazione generale risulta $i=k(t)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

Derivando rispetto al tempo si ha

$$\frac{di}{dt}=k'\cdot e^{-\frac{R}{L}t}+k\cdot\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

Riprendendo l'equazione completa (1) e sostituendo risulta

$$k'\cdot e^{-\frac{R}{L}t}+k\cdot\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{R}{L}k\cdot e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{\mathcal{E}}{L}\rightarrow k'=\frac{\mathcal{E}}{L}e^{\frac{R}{L}t}$$

Integrando $$k=\frac{\mathcal{E}}{L}\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}+c_2=\frac{\mathcal{E}}{R}e^{\frac{R}{L}t}+c_2$$

Per cui si ha $$i=\left[\frac{\mathcal{E}}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}t}+c_2\right]\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Ora si deve determinare la costante c_2. All'istante iniziale t=0 la corrente nel circuito è nulla

$$0=\left[\frac{\mathcal{E}}{R}\cdot e^{0}+c_2\right]\cdot e^{0}\rightarrow c_2=-\frac{\mathcal{E}}{R}$$

Finalmente abbiamo l'equazione

$$i=\left[\frac{\mathcal{E}}{R}\cdot e^{\frac{R}{L}t}-\frac{\mathcal{E}}{R}\right]\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\rightarrow i=\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Il quoziente L/R viene indicato con la lettera τ e viene denominata costante di tempo del circuito

$$i=\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

	La corrente inizialmente nulla cresce esponenzialmente. Per t→∝ la corrente vale $i_{max} = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Determiniamo quando ragionevolmente la corrente si può considerare massima cioè praticamente all'99% del valore massimo $99\% \cdot i_{max} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ ovvero: $\frac{99}{100}\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \rightarrow \frac{99}{100} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow \frac{1}{100} = e^{-\frac{t}{\tau}} \ln\frac{1}{100} = -\frac{t}{\tau} \rightarrow$ $\rightarrow t = \tau \ln 100 \rightarrow t \cong 4{,}60 \cdot \tau$ Per R=1000 Ω e L=500 mH la costante vale τ=0,0005 s $\rightarrow t \cong 0{,}0023$ s

7	DECADIMENTO RADIOATTIVO
Testo	***Scrivere la funzione che regola il decadimento delle sostanze radioattive nel tempo*** ***Stimare la massa m_0 radioattiva sapendo che dopo 5 anni la massa è di 1,0 kilogrammi e dopo 8 anni 0,8 kg.***

Impostazione

Il decadimento radioattivo è un insieme di processi fisico-nucleari attraverso i quali alcuni nuclei atomici *instabili* o *radioattivi* (radionuclidi) decadono in un intervallo di tempo detto tempo di decadimento, in nuclei di energia inferiore raggiungendo uno stato di maggiore stabilità con emissione di radiazioni ionizzanti Il processo continua fino a che gli elementi prodotti, eventualmente a loro volta radioattivi, non raggiungono una condizione di stabilità.
Per ogni elemento esiste un tempo di dimezzamento (emivita) per cui la massa di materiale iniziale si dimezza. Indichiamo questo tempo di dimezzamento con $\mathbf{t_d}$.

Per scrivere una funzione che descriva la massa al tempo t partendo da una massa iniziale $\mathbf{m_0}$ è possibile procedere con un metodo semplificato.
Osservando che la massa m_0 si dimezza dopo ogni intervallo di tempo **td**. si ha che

$$m_0 \xrightarrow{t_d} \frac{1}{2}\cdot m_0 \; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot m_0 \xrightarrow{t_d} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot m_0 \xrightarrow{t_d}$$
$$\xrightarrow{t_d} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot m_0 \xrightarrow{t_d} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot m_0 ....$$

Quindi si ha una progressione geometrica di ragione 1/2 : è possibile allora scrivere

$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_d}}$ che è una funzione continua di t (espresso in anni).

Molto spesso si ottiene la funzione che esprime la massa radioattiva residua impostando e risolvendo una equazione differenziale.
Si esprime la relazione osservando che la variazione di massa nel tempo dm/dt è proporzionale alla massa presente mediante una costante λ dipendente dall'elemento ovvero

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda \cdot m$$

Il segno negativo dipende dal fatto che è una variazione in diminuzione.

Risoluzione

E’ una equazione differenziale a variabili separabili.

$$\frac{dm}{m} = -\lambda \cdot dt$$

Integrando $\ln m = -\lambda \cdot t + c \rightarrow m = e^{c} \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Per il calcolo della costante di integrazione abbiamo che a t=0 la massa è m_0

$$m_0 = e^{c} \cdot e^{0} \rightarrow e^{c} = m_0$$

pertanto

$$m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Per stabilire il valore del parametro λ si deve considerare che dopo il tempo t_d la massa si dimezza, ovvero

$\frac{1}{2} m_0 = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_d}$ da cui con alcuni semplici passaggi si ottiene

$$\frac{1}{2} = \cdot e^{-\lambda \cdot t_d} \rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\lambda \cdot t_d \rightarrow -\ln 2 = -\lambda \cdot t_d \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{t_d}$$

L’equazione finale quindi è

$$m = m_0 \cdot e^{-\ln 2 \frac{t}{t_d}}$$

In realtà manipolando ulteriormente l’equazione diviene

$$m = m_0 \cdot e^{-\ln 2 \frac{t}{t_d}} = m_0 \cdot \left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{t}{t_d}} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{e^{\ln 2}}\right)^{\frac{t}{t_d}} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_d}}$$

Cioè esattamente l’equazione trovata in precedenza. (confronta risoluzione della simulazione ministeriale d’esame aprile 2015)

Per risolvere la parte numerica abbiamo che

$$\begin{array}{l} m(5) = 1{,}0 \\ m(8) = 0{,}8 \end{array} \quad \text{da cui il sistema} \quad \begin{cases} 1 = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{t_d}} \\ 0{,}8 = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{t_d}} \end{cases}$$

Da cui $\frac{1}{0{,}8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{t_d}} \rightarrow 1{,}25 = 2^{\frac{3}{t_d}} \rightarrow \log_2(1{,}25) = \frac{3}{t_d} \rightarrow t_d = \frac{3}{\log_2(1{,}25)}$

Da cui $t_d = \frac{3 \ln 2}{\ln(1{,}25)} \approx 9{,}31$ anni

Per il calcolo di m_0 dalla prima delle equazioni del sistema

$$m_0 = (2)^{\frac{5}{t_d}} = 2^{\frac{5}{9{,}31}} = 2^{0{,}537} = 1{,}451 \text{ kg}$$