

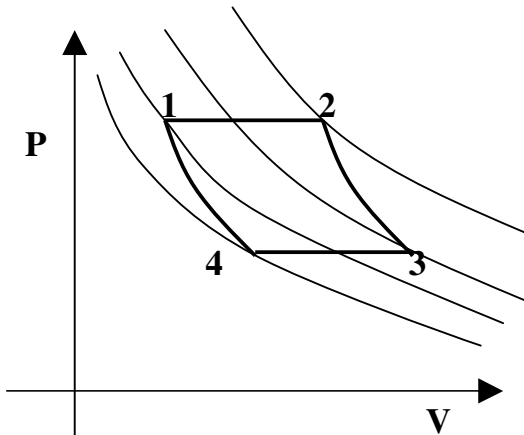


TERMODINAMICA

CICLO 2 ISOBARE+2 ADIABATICHE

Prof. Mauro D'ETTORRE

CICLO TERMODINAMICO



Il ciclo è $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$
 1 mole di gas monoatomico.

I dati sono

$P_1 = 100.000$ Pascal

$T_1 = 200$ K

$T_2 = 400$ K

$T_3 = 300$ K

$n = 1$

$k = 5/3$

1. Calcolare il lavoro netto fornito dalla macchina termodinamica.
2. Calcolare il rendimento η della macchina termodinamica

Le equazioni utilizzate sono:

L'equazione dei gas perfetti $PV = nRT$ Per le Trasformazioni adiabatiche $\begin{cases} P_i V_i^k = P_f V_f^k \\ T_i V_i^{k-1} = T_f V_f^{k-1} \end{cases}$

Stato	Trasformazione	RICERCA CONDIZIONI DI STATO
1	Eq. di stato	$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1}$
2	Isobara $1 \rightarrow 2$	Si ha $\begin{cases} P_1 V_1 = nRT_1 \\ P_2 V_2 = nRT_2 \end{cases}$ poichè $P_1 = P_2$ risulta $V_2 = \frac{T_2}{T_1} V_1$
3	Adiabatica $2 \rightarrow 3$	Si utilizza per prima la $T_2 V_2^{k-1} = T_3 V_3^{k-1}$ da cui si ricava $V_3 = V_2 \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{T_2}{T_1} V_1 \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{1}{k-1}}$ Poi dalla $P_2 V_2^k = P_3 V_3^k$ si ricava $P_3 = P_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^k = P_1 \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$
4	Isobara $3 \rightarrow 4$ + Adiabatica $4 \rightarrow 1$	Nello stato 4 è – per la trasformazione isobara $3 \rightarrow 4$ $P_4 = P_3 = P_1 \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$ V e T vengono calcolato utilizzando le equazioni della trasformazione adiabatica $4 \rightarrow 1$ $\begin{cases} P_4 V_4^k = P_1 V_1^k \\ T_4 V_4^{k-1} = T_1 V_1^{k-1} \end{cases}$ Dalla prima si ottiene $V_4 = \left(\frac{P_1}{P_4} \right)^{\frac{1}{k}} V_1 = \left(\frac{P_1}{P_1 \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}}} \right)^{\frac{1}{k}} V_1 = \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{k}{k-1}} V_1 = \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{1}{k-1}} V_1$

		Dalla seconda si ottiene $T_4 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_4} \right)^{k-1} = T_1 \left(\frac{V_1}{V_1 \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{1}{k-1}}} \right)^{k-1} = T_1 \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{1}{k-1} \cdot (k-1)} = T_1 \frac{T_3}{T_2}$
--	--	--

RIEPILOGO CONDIZIONI DI STATO

Stato	P	V	T
1	$P_1 = 100.000 \text{ Pa}$	$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1}$	200 K
		$V_1 = \frac{nR \times 200}{100.000} = \frac{nR}{500} \approx 0,016628 \text{ m}^3$	
2	$P_2 = P_1$	$V_2 = \frac{T_2}{T_1} V_1 = \frac{T_2}{T_1} \frac{nRT_1}{P_1} = \frac{nRT_2}{P_1}$	400 K
	100.000 Pa	$V_2 = \frac{nR \times 400}{100.000} = \frac{nR}{250} \approx 0,033256 \text{ m}^3$	
3	$P_3 = P_1 \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$	$V_3 = \frac{T_2}{T_1} V_1 \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{T_2}{T_1} \frac{nRT_1}{P_1} \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{nRT_2}{P_1} \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{1}{k-1}}$	300 K
	48.714 Pa	$V_3 = \frac{nR \times 400}{100.000} \left(\frac{400}{300} \right)^{\frac{1}{3-1}} = \frac{nR}{250} \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 0,0512001 \text{ m}^3$	
4	$P_4 = P_3 = P_1 \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$	$V_4 = V_1 \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{nRT_1}{P_1} \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{T_1}{T_2} V_3$	$T_4 = T_1 \left(\frac{T_3}{T_2} \right)$
	48.714 Pa	$V_4 = \frac{nR \times 200}{100.000} \left(\frac{400}{300} \right)^{\frac{1}{3-1}} = \frac{nR}{500} \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 0,0256 \text{ m}^3$	150

Trasformazione	Lavoro	Q Energia Termica
Isobara 1→2	$L = P_i (V_f - V_i)$	$Q = \frac{k}{k-1} nR (T_f - T_i)$
	$L_{1 \rightarrow 2} = P_1 (V_2 - V_1) = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1} V_1 - V_1 \right) = P_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \frac{nRT_1}{P_1} P_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = nR (T_2 - T_1)$	$Q_{1 \rightarrow 2} = \frac{k}{k-1} nR (T_2 - T_1)$
	+1662,8 J	+4157 J
Adiabatica 2→3	$L = \frac{1}{k-1} (P_i V_i - P_f V_f)$	$Q_{2 \rightarrow 3} = 0$
	$L_{2 \rightarrow 3} = \frac{1}{k-1} (P_2 V_2 - P_3 V_3) = \frac{1}{k-1} \left[P_1 \frac{T_2}{T_1} V_1 - P_1 \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{T_2}{T_1} V_1 \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{1}{k-1}} \right] =$	
	$= \frac{1}{k-1} P_1 V_1 \frac{T_2}{T_1} \left[1 - \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{\frac{1}{k-1}} \right] = \frac{1}{k-1} P_1 V_1 \frac{T_2}{T_1} \left[1 - \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \right]$	
	$= \frac{1}{k-1} P_1 V_1 \frac{T_2}{T_1} \left[1 - \left(\frac{T_3}{T_2} \right)^{\frac{k-1}{k-1}} \right] = \frac{1}{k-1} P_1 V_1 \frac{T_2}{T_1} \left(1 - \frac{T_3}{T_2} \right) = \frac{1}{k-1} P_1 V_1 \left(\frac{T_2 - T_3}{T_1} \right)$	
$= \frac{1}{k-1} P_1 \frac{nRT_1}{P_1} \left(\frac{T_2 - T_3}{T_1} \right) = \frac{nR}{k-1} (T_2 - T_3)$		
+1247,1 J	0 J OK	

Isobara 3→4	$L = P_i(V_f - V_i)$	$Q = \frac{k}{k-1} nR(T_f - T_i)$
	$L_{3\rightarrow4} = P_3(V_4 - V_3) = P_1 \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \left[V_1 \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}} - V_1 \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}} \right] =$ $= P_1 V_1 \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left[1 - \frac{T_2}{T_1} \right] = P_1 V_1 \frac{T_3}{T_2} \left[1 - \frac{T_2}{T_1} \right] = P_1 V_1 \left(\frac{T_3}{T_2} - \frac{T_3}{T_1}\right) =$ $= P_1 \frac{nRT_1}{P_1} \left(\frac{T_3}{T_2} - \frac{T_3}{T_1}\right) = nRT_3 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right)$	$Q_{3\rightarrow4} = \frac{k}{k-1} nR(T_4 - T_3) =$ $= \frac{k}{k-1} nR \left(\frac{T_3}{T_2} T_1 - T_3\right) =$ $= \frac{k}{k-1} nRT_3 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right)$
	-1247,1 J	-3117,75 J OK
Adiabatica 4→1	$L = \frac{1}{k-1} (P_i V_i - P_f V_f)$	
	$L_{4\rightarrow1} = \frac{1}{k-1} (P_4 V_4 - P_1 V_1) = \frac{1}{k-1} \left[P_1 \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} V_1 \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}} - P_1 V_1 \right] =$ $= \frac{1}{k-1} P_1 V_1 \left[\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{k-1}} - 1 \right] = \frac{1}{k-1} P_1 V_1 \left[\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}} - 1 \right]$ $= \frac{1}{k-1} P_1 V_1 \left[\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{k}{k-1} + \frac{1}{k-1}} - 1 \right] = \frac{1}{k-1} P_1 V_1 \left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right) =$ $= \frac{1}{k-1} P_1 \frac{nRT_1}{P_1} \left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right) = \frac{nRT_1}{k-1} \left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)$	$Q_{4\rightarrow1} = 0$
	-623,55 J	0 J
Σ	$L_{TOT} = P_1 V_1 \left[\frac{T_2}{T_1} - \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} - 1 + \frac{1}{k-1} \left(\frac{T_2}{T_1} - \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} - 1 \right) \right] =$ $= P_1 V_1 \left[\left(1 + \frac{1}{k-1} \right) \left(\frac{T_2}{T_1} - \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} - 1 \right) \right] =$ $= P_1 V_1 \frac{k}{k-1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{T_3}{T_2} \right) =$ $= P_1 \frac{nRT_1}{P_1} \frac{k}{k-1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{T_3}{T_2} \right) = nR \frac{k}{k-1} \frac{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)}{T_2}$ $L_{TOT} = nR \frac{k}{k-1} \left[\frac{T_2^2 - T_2 T_3 - T_1 T_2 + T_1 T_3}{T_2} \right] =$ $= R \frac{k}{k-1} \left[T_2 - T_3 - T_1 + \frac{T_1 T_3}{T_2} \right] = Q_{TOT}$	$Q_{TOT} = \frac{k}{k-1} nR \left[T_2 - T_1 + T_1 \frac{T_3}{T_2} - T_3 \right] =$ $= L_{TOT}$
	1039,25 J	1039,25 J
		$Q_{FORNITO} = \frac{k}{k-1} nR(T_2 - T_1) =$ 4157 J

Calcolo del Rendimento $\eta = \frac{\Delta L_{netto}}{\Delta Q_{fornito}} = \frac{1039,25}{4157} = 0,25 = 25,00\%$

Formulario delle trasformazioni termodinamiche

Posto $k = \frac{c_p}{c_v}$ risulta $c_p = \frac{k}{k-1}R$ e $c_v = \frac{1}{k-1}R$

Energia interna totale $U = nc_v T = n \frac{1}{k-1} RT$ dove k assume i seguenti valori:

gas monoatomico: $k=5/3=1,67$ gas biatomico: $k=7/5=1,40$ gas poliatomico: $k=4/3=1,33$

R=Costante dei gas il cui valore è: $8,314 \frac{\text{Joule}}{\text{mole} \cdot \text{K}}$

VALORI di Q ed L nelle trasformazioni termodinamiche

Trasformazione	Lavoro	Q Energia Termica
Isobara $P = \text{costante}$	$L = P_i(V_f - V_i)$	$Q = nC_p(T_f - T_i) = \frac{k}{k-1}nR(T_f - T_i)$
Isocora $V = \text{costante}$	$L = 0$	$Q = \Delta U = nC_v(T_f - T_i) = \frac{1}{k-1}nR(T_f - T_i)$
Isoterma $T = \text{costante}$	$L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$	$Q = L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$
Adiabatica $PV^k = \text{cost.}$	$L = \frac{1}{k-1}(P_i V_i - P_f V_f) = \frac{P_i V_i}{k-1} \left[1 - \left(\frac{P_f}{P_i} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$	$Q = 0$