FUNZIONI A DUE VARIABILI

RICERCA DEI PUNTI DI MASSIMO E MINIMO

PREMESSE

1) DERIVATE PARZIALI DI UNA FUNZIONE A DUE O PIU’ VARIABILI

Data una funzione di n variabili $z=f\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...x_n)$ si dice derivata parziale la funzione derivata considerando una x_i come variabile e le altre come costanti. La derivata parziale viene indicata con la seguente simbologia (dove x_i è la variabile rispetto alla quale si è derivato) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ oppure } f'_{x_i}$$

Esempio di funzioni a due variabili:

$$z = f(x,y) = x^3 + 3xy + y^2 + x + y + 1$$

Si considera la x come variabile mentre la y è considerata costante:

$$z = f(x,y) = x^3 + 3xy + y^2 + x + y + 1$$

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y + \ 0 \ + \ 1 + \ 0 + 0 = 3x^2 + 3y$$

Viceversa si può considerare la y come variabile mentre la x è considerata costante:

$$z = f(x,y) = x^3 + 3xy + y^2 + x + y + 1$$

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 3x + 2y + \ 0 + \ 1 + \ 0 = 3x + 2y$$

Si possono calcolare le derivate seconde: sono infatti le derivate delle derivate.

Per esempio deriviamo la derivata parziale rispetto ad x:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y$$

Può essere derivata sia rispetto la *x* (tenendo costante la *y*) sia rispetto la *y* (considerando costante la *x*). Derivando rispetto la *x*:

significa derivata seconda

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 6x$$

significa derivata due volte rispetto a *x*

Derivando invece rispetto la *y*:

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3$$

Significa che la funzione *z=f(x,y)* è stata derivata due volte prima rispetto la *x* e poi rispetto la *y* (DERIVATA MISTA)

Ora consideriamo la derivata prima parziale rispetto alla *y*:

$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 2y$$

Anche questa può essere derivata sia rispetto la *x*, sia rispetto la *y*. Derivando rispetto la *x*:

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x$$

Significa che la funzione *z=f(x,y)* è stata derivata due volte prima rispetto la *y* e poi rispetto la *x* (DERIVATA MISTA)

Derivando invece rispetto la *y*:

$$f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 2$$

Significa che la funzione *z=f(x,y)* è stata derivata due volte rispetto la *y*

Pertanto una funzione *z=f(x,y)* ha due derivate parziali prime e 4 derivate parziali seconde[1].

Consideriamo infine le derivate parziali seconde miste cioè quelle fatte prima rispetto una variabile poi rispetto l'altra. Come già calcolato:

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3 \qquad \text{e} \qquad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$$

ovvero

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$$

L'uguaglianza sopra non è una casuale ma è una importante proprietà nota come **Regola di Schwarz:**
"Le derivate parziali seconde miste sono uguali"

In definitiva quando occorrerà calcolare le derivate seconde si potranno eseguire solo tre operazioni di derivazioni invece di 4.

2) MATRICI E DETERMINANTI

Una tabella così formata:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{ik} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & a_{n6} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

prende il nome di MATRICE con *n* righe ed *m* colonne.

Ogni elemento *a* della matrice viene individuato mediante due numeri (pedici) che

[1] Derivando le 4 derivate seconde si ottengono 8 derivate parziali terze

indicano rispettivamente la riga e la colonna dove è ubicato:

Elemento generico $\rightarrow$ a_{ik} $\rightarrow$ ***k*** rappresenta la colonna

i rappresenta la riga

Esempio: $\begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & (5) & 8 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ è una matrice 3x5 (3 righe e 5 colonne)

L'elemento a_{23} è quello della 2ª riga e 3ª colonna: in questo caso a_{23} =5.

Le matrici per cui $m=n$ ovvero il numero di righe è uguale a quello delle colonne, si chiamano **matrici quadrate.**
Per le sole matrici quadre è possibile calcolare un valore chiamato **determinante.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ \vdots & n \times n & \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix} = f\left(a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots.. a_{nn}\right)$$

Per quello che servirà in seguito nel calcolo dei massimi e minimi delle funzioni a due variabili occorre saper calcolare il determinante delle sole matrici quadre 2x2 e 3x3.

- Matrici 2x2

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{è} \quad \Delta|A| = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$$

diagonale secondaria diagonale principale

Regola mnemonica:
"Il determinante di una matrice 2x2 vale il prodotto degli elementi della diagonale principale meno il prodotto degli elementi della diagonale secondaria"

Esempio:

$$\det\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - [(-2) \times 1] = 12 - (-2) = 14$$

- Matrici 3x3

Il determinante vale:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{è} \quad \Delta|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Può essere estesa la regola precedente tenendo presente che:
le diagonali principali vanno da ALTO- SINISTRA a BASSO-DESTRA;
le diagonali secondarie vanno da BASSO-SINISTRA a ALTO-DESTRA.

Data la seguente matrice 3x3:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Si applica la **regola di Sarrus:**

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right|$$

4^a colonna $=1^a$ colonna

5^a colonna $=2^a$ colonna

ovvero si ripetono la prima e la seconda colonna. Si ha così:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

diagonali secondarie

diagonali principali

La regola mnemonica (di Sarrus) può essere così espressa:
"Il determinante di una matrice quadrata 3x3 è uguale alla somma dei prodotti degli elementi posti su ognuna delle diagonali principali meno i prodotti degli elementi posti su ognuna delle diagonali secondarie"

Applicando la regola di Sarrus:

$$\Delta|A| = (2)\times(0)\times(-2)+(-3)\times(1)\times(2)+(4)\times(5)\times(3)-[(2)\times(0)\times(4)+(3)\times(1)\times(2)+$$
$$+(-2)\times(5)\times(-3)] = 0-6+60-[0+6+30] = 54-36 = 18$$

MASSIMI E MINIMI LIBERI

Ricordiamo la procedura generale di ricerca di massimi relativi per la funzione ad una sola variabile:

$$y = f(x)$$

1ª fase: calcolo derivata prima

$$y^{'} = f^{'}(x)$$

la derivata viene uguagliata a zero e risolta l'equazione corrispondente:

$$f^{'}(x) = 0 \ \text{ per } x_1, x_2, x_{3,} x_4 \ldots\ldots$$

2ª fase: calcolo derivata seconda

$$y^{''} = f^{''}(x)$$

Per decidere se una soluzione x_i dell'equazione precedente rappresenta l'ascissa di un punto di massimo o minimo si ha che vale:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f^{''}(x_i) > 0 & x_i \ \text{ ascissa punto di minimo} \\ f^{''}(x_i) < 0 & x_i \ \text{ ascissa punto di massimo} \\ f^{''}(x_i) = 0 & \text{nulla si può dire: occorre studiare la } y^{'''} \end{array}}$$

Esempio:

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$$
$$y^{'} = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \quad \text{per} \quad x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = \text{-}2$$
$$y^{''} = 12x + 6$$
$$y^{''}(1) = 18 > 0 \qquad \text{punto di minimo } (1,-6)$$
$$y^{''}(-2) = -18 < 0 \qquad \text{punto di massimo } (-2,21)$$

Per le funzioni a due variabili si segue una procedura analoga.

Data la funzione a 2 variabili:

$$z = f(x, y)$$

1ª fase: calcolo delle 2 derivate prime

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

le due derivate parziali prime vengono uguagliate a zero contemporaneamente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 & \text{soluzioni del sistema sono le coppie di valori} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 & (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \ldots\ldots (x_n, y_n) \end{cases}$$

2ª fase: calcolo delle 4 derivate seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Con le derivate seconde si forma una matrice 2x2 detta **hessiano (H):**

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad |H| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$$

Per decidere se una coppia di valori *(x_i,y_i)* soluzione del sistema precedente risulta un massimo o minimo si ha che vale:

$$\boxed{\begin{array}{ll} |H(x_i, y_i| > 0 & \text{esistono max e min} \\ & \text{se } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \quad \text{punto di minimo} \\ & \text{se } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \quad \text{punto di massimo} \\ |H(x_i, y_i| < 0 & \text{punto di sella} \\ |H(x_i, y_i| = 0 & \text{occorre procedere ulteriormente} \end{array}}$$

Esempio n° 1:

E’ data la seguente funzione a 2 variabili:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy + x + y + 1$$

Calcolo derivate prime e seconde:

$$f_x^{'}(x,y) = 2x + 3y + 1 \qquad f_y^{'}(x,y) = 2y + 3x + 1$$

$$f_{xx}^{''}(x,y) = 2 \qquad f_{yy}^{''}(x,y) = 2 \qquad f_{xy}^{''}(x,y) = f_{xy}^{''}(x,y) = 3$$

Viene formato il sistema con le derivate prime uguagliate a zero

$$\begin{cases} f_x^{'} = 0 \\ f_y^{'} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 2y + 3x + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{unica soluzione} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

pertanto:

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \det \mathrm{H} = 2 \times 2 - 3 \times 3 = -5 < 0$$

$$\text{cioè il punto } \mathrm{P}\left(-\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5}\right) \text{ è un punto di sella}$$

Esempio n° 2:
Data la seguente funzione a 2 variabili:

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x + y + 1$$

Calcolo derivate prime e seconde:

$$f_x^{'}(x,y) = 3x^2 - 3 \qquad f_y^{'}(x,y) = 2y + 1$$

$$f_{xx}^{''}(x,y) = 6x \qquad f_{yy}^{''}(x,y) = 2 \qquad f_{xy}^{''}(x,y) = f_{xy}^{''}(x,y) = 0$$

Viene formato il sistema con le derivate prime uguagliate a zero

$$\begin{cases} f_x^{'} = 0 \\ f_y^{'} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

è un sistema di 2° grado che ammette due coppie di soluzioni:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

pertanto:

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} 6\mathrm{x} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \det|\mathrm{H}| = 12x$$

$$H\left(1, -\tfrac{1}{2}\right) = 12 > 0 \Rightarrow f''_{xx}\left(1, -\tfrac{1}{2}\right) = 6 > 0 \Rightarrow \text{ minimo } \left(1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}\right)$$
$$H\left(-1, -\tfrac{1}{2}\right) = -12 < 0 \Rightarrow \text{ punto di sella } \left(-1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{11}{4}\right)$$

Esempio n° 3:
Data la seguente funzione a 2 variabili:

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 y + x^2 + x - 3y + 1$$

Calcolo derivate prime e seconde:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 + 6xy + 2x + 1 \qquad f'_y(x, y) = 3x^2 - 3$$
$$f''_{xx}(x, y) = 6x + 6y + 2 \qquad f''_{yy}(x, y) = 0 \qquad f''_{xy}(x, y) = f''_{xy}(x, y) = 6x$$

Il sistema con le derivate prime uguagliate a zero è:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6xy + 2x + 1 = 0 \\ 3x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

è un sistema di 4° grado che ammette, al massimo, 4 coppie di soluzioni. In questo caso le soluzioni sono soltanto due:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

L'hessiano vale:

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} 6\mathrm{x} + 6\mathrm{y} + 2 & 6\mathrm{x} \\ 6\mathrm{x} & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \det|\mathrm{H}| = -36x^2$$

pertanto:

$$H(1, -1) = -36 < 0 \Rightarrow \text{ punto di sella } (1, -1, 4)$$
$$H\left(-1, \tfrac{1}{3}\right) = -36 < 0 \Rightarrow \text{ punto di sella } \left(-1, \tfrac{1}{3}, 0\right)$$

Esempio n° 4:
Data la seguente funzione a 2 variabili:

$$f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$$

Calcolo derivate prime e seconde:

$$f_x^{'}(x,y) = 6x^2 - 6x \qquad f_y^{'}(x,y) = 3y^2 - 3$$

$$f_{xx}^{"}(x,y) = 12x - 6 \qquad f_{yy}^{"}(x,y) = 6y \qquad f_{xy}^{"}(x,y) = f_{xy}^{"}(x,y) = 0$$

Il sistema con le derivate prime uguagliate a zero è:

$$\begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

è un sistema di 4° grado che ammette 4 coppie di soluzioni. In questo caso le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

L'hessiano vale:

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} 12\mathrm{x} - 6 & 0 \\ 0 & 6\mathrm{y} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \det\left|\,\mathrm{H}\right| = (12x - 6) \times 6y = 36y(2x - 1)$$

pertanto:

$$H(0,1) = -36 < 0 \Rightarrow \text{ punto di sella } \quad (0,1,-2)$$

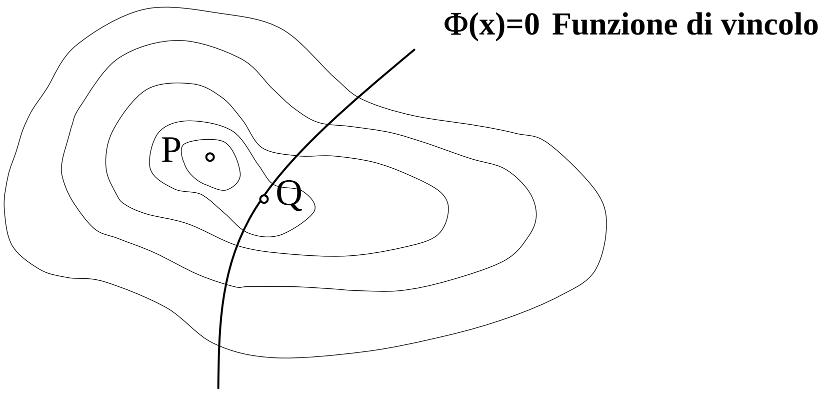
$$H(0,-1) = 36 > 0 \Rightarrow f_{xx}^{''}(0,-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{ massimo } \quad (0,-1,2)$$

$$H(1,1) = 36 > 0 \Rightarrow f_{xx}^{''}(1,1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{ minimo } \quad (1,1,-3)$$

$$H(1,-1) = -36 < 0 \Rightarrow \text{ punto di sella } \quad (1,-1,1)$$

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Nella seguente rappresentazione di una funzione a due variabili mediante linee di livello, il punto P è il massimo mentre rimanendo sulla linea di equazione $\phi(x,y)=0$ il punto di massimo (vincolato) è Q. Immaginando di percorrere una strada montana rappresentata dalla linea ϕ, il punto P è la cima del colle mentre il punto Q è il punto più alto della strada (passo)



La funzione di vincolo $\phi(x,y)=0$ è espressa in forma *implicita*: se è possibile esplicitarla nell'equazione

$$y=g(x)$$

la ricerca dei massimi e minimi vincolati si riduce alla ricerca dei minimi e massimi di una funzione ad una sola variabile.

Esempio:

$$z = 2x^2 + y^2 + 2xy \qquad \text{funzione a 2 variabili}$$

$$\varphi(x,y) = x + y + 2 = 0 \qquad \text{funzione di vincolo}$$

In questo caso il vincolo $\phi(x,y)=0$ può essere esplicitato:

$$x + y + 2 = 0 \Rightarrow y = -x - 2$$

La funzione così ottenuta (una retta) viene sostituita nella funzione da massimizzare:

$$z = 2x^2 + (-x-2)^2 + 2x(-x-2) \quad \Rightarrow \quad z = x^2 + 4$$

Tale funzione ad una sola variabile è facilmente massimizzabile (peraltro risulta una parabola).

Più in generale è possibile ricercare i massimi e minimi vincolati con il metodo di Lagrange.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange
Con le funzioni di cui sopra si costruisce una funzione detta appunto *di Lagrange* (o *lagrangiana*)

$$\mathrm{F}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

dove λ è la variabile ausiliaria[2].

F è una funzione nelle tre variabili *x, y,* λ dove *x* ed *y* sono le coordinate degli eventuali punti di max./min. vincolati mentre la variabile ausiliaria λ non ha un significato immediato.

Procedimento
Si calcolano le tre derivate parziali prime di F rispetto le tre variabili *x, y,* λ

$$\mathrm{F}'_{\mathrm{x}} \qquad \mathrm{F}'_{\mathrm{y}} \qquad \mathrm{F}'_{\lambda}$$

E' facile verificare che risulta che:

$$\mathrm{F}'_{\lambda} = \varphi(x, y)$$

Risulta formato il seguente sistema di grado *n* nelle tre variabili *x, y,* λ

$$\begin{cases} \mathrm{F}'_{\mathrm{x}} = 0 \\ \mathrm{F}'_{\mathrm{y}} = 0 \\ \mathrm{F}'_{\lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono *n* terne (x_i, y_i, λ_i). Per stabilire se un punto risulti di minimo o massimo vincolato si considerano le derivate seconde di F con cui si costruisce la seguente matrice 3x3:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{F}''_{\lambda\lambda} & \mathrm{F}''_{\lambda x} & \mathrm{F}''_{\lambda y} \\ \mathrm{F}''_{x\lambda} & \mathrm{F}''_{xx} & \mathrm{F}''_{xy} \\ \mathrm{F}''_{y\lambda} & \mathrm{F}''_{yx} & \mathrm{F}''_{yy} \end{vmatrix}$$

Ricordando che le derivate miste sono uguali è facile calcolare che:

$$\mathrm{F}'_{\lambda} = \varphi(x, y) \Rightarrow \mathrm{F}''_{\lambda\lambda} = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = 0$$

$$\text{inoltre} \quad \mathrm{F}''_{\lambda x} = \mathrm{F}''_{x\lambda} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi'_x \quad \text{e} \quad \mathrm{F}''_{\lambda y} = \mathrm{F}''_{y\lambda} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi'_y$$

---

[2] nota anche come *moltiplicatore di Lagrange*

Pertanto la matrice ha una espressione semplificata detta *hessiano orlato:*

$$H_0 = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$$

Il valore *det(H_0)* è calcolato mediante la regola di Sarrus. Per una terna (x_i, y_i, λ_i) soluzione del sistema precedente risulterà allora:

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0(x_i, y_i, \lambda_i) > 0 \Rightarrow (x_i, y_i, \lambda_i) \text{ è un MAX} \\ H_0(x_i, y_i, \lambda_i) < 0 \Rightarrow (x_i, y_i, \lambda_i) \text{ è un min} \end{array}}$$

Esempio:

Data la seguente funzione a 2 variabili: $f(x, y) = x + 2y$

con il seguente vincolo: $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5$

La funzione di Lagrange è:

$$F = x + 2y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 5\right) \Rightarrow F = x + 2y + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 5\lambda$$

Calcolo delle derivate prime:

$$F'_x = 1 + 2\lambda x \qquad F'_y = 2 + 2\lambda y \qquad \text{e} \qquad F'_\lambda = x^2 + y^2 - 5$$

Il sistema con le derivate prime uguagliate a zero è:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

è un sistema di 8° che ammette al massimo 8 terne di soluzioni.
In questo caso le soluzioni sono solo due:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Calcolo degli elementi dell'Hessiano orlato:

$$F''_{xx} = 2\lambda \qquad \mathrm{F}''_{yy} = 2\lambda \qquad \mathrm{F}''_{xy} = F''_{xy} = 0$$

$$\varphi'_x = 2x \qquad \varphi'_y = 2y$$

L'hessiano orlato vale:

$$\mathrm{H}_0 = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix}$$

Calcolando il determinante dell'hessiano orlato per le terne (x_i, y_i, λ_i) soluzioni del sistema precedente si ha:

$$\mathrm{H}\left(1,2,-\tfrac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0 \Rightarrow \max$$

$$z = f(1,2) = 5 \qquad \Rightarrow P_1 = (1,2,5) \quad \text{punto di max}$$

$$\mathrm{H}\left(-1,-2,\tfrac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & -1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -20 < 0 \Rightarrow \min$$

$$z = f(-1,-2) = -5 \qquad \Rightarrow P_1 = (-1,-2,-5) \quad \text{punto di minimo}$$