CAPITOLO XVI (*)

CALCOLO DI AREE

131. - *Generalità.*

Abbiamo visto che l'operazione di integrazione definita e quella di integrazione indefinita sono sorte, appunto, dalla necessità di calcolare l'area del *trapezoide* limitato dalla curva, dall'asse delle x e dalle parallele all'asse delle y condotte agli estremi dell'intervallo $[a\,;b]$ in cui la funzione continua $y = f(x)$ è stata considerata. Tale area è data da:

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,d\,x = F(b) - F(a)}, \qquad \mathbf{(112\,;1)}$$

formula che si riferisce al caso in cui la funzione non ha punti di ordinata negativa e che applicheremo, nei prossimi paragrafi, per il calcolo di alcune aree notevoli.

132. - *Area di un segmento parabolico - Teorema di Archimede.*

Tale questione, già risolta al Cap. VI, § 41 col calcolo del limite di una particolare successione, può anche essere risolta nel seguente modo.

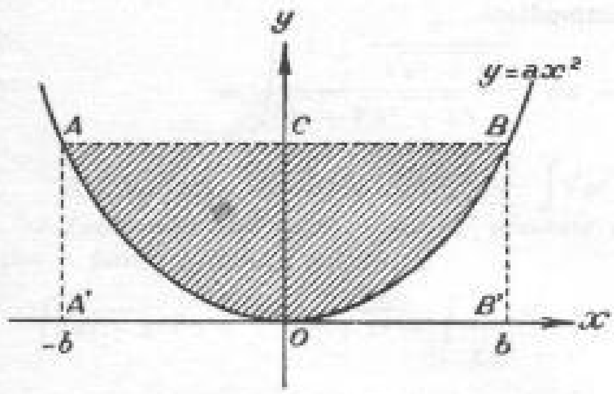

Fig. 116.

Data la funzione: $y = a\,x^2$ $(a > o)$, *parabola con vertice nell'origine e concavità rivolta verso l'alto, consideriamola nell'intervallo chiuso* $[-b\,;b]$ *e proponiamoci di calcolare l'area del segmento parabolico AOB in cui è, ovviamente:*

$$A\,(-b\;;\;a\,b^2)$$

e

$$B\,(b\;;\;a\,b^2).$$

Potremo scrivere:

Area = 2 [area rett. OB'BC — area triang. mist. OB'B] =

$$= 2\left(b \cdot a\,b^2 - \int_0^b a\,x^2\,d\,x\right) = 2\left\{a\,b^3 - a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b\right\} = 2\left(a\,b^3 - \frac{1}{3}\,a\,b^3\right) = \frac{4}{3}\,a\,b^3$$

(*) Gli esercizi e i problemi relativi al presente Capitolo si trovano da pag. 366 a pag. 368.

cioè: *l'area del segmento parabolico richiesto è i due terzi dell'area del rettangolo* AA'B'B.

133. – *Quadratura della sinusoide.*

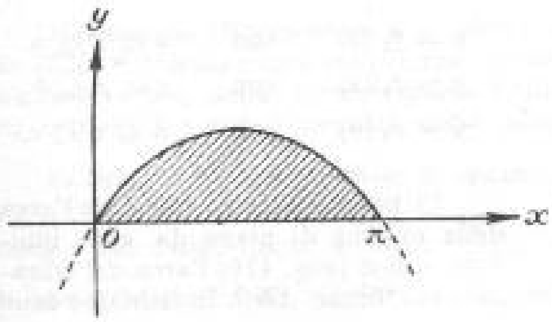

Fig. 117.

Consideriamo la funzione: $y = \text{sen } x$ *con* $0 \leqslant x \leqslant \pi$. *L'area della regione finita di piano limitata dalla curva e dall'asse delle* x *è:*

$$Area = \int_0^\pi \text{sen } x \, dx = [-\cos x]_0^\pi =$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

unità di misura.

134. — *Area dell'ellisse.*

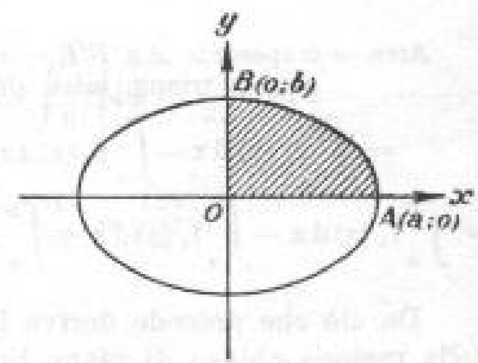

Fig. 118.

Dell'ellisse di equazione: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

cioè: $$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

consideriamo il solo ramo localizzato nel I quadrante e corrispondente, cioè, alle limitazioni:

$$0 \leqslant x \leqslant a \quad e \quad 0 \leqslant y \leqslant b.$$

L'area dell'ellisse è, quindi, uguale a:

$$Area = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = (^1) = 4 \frac{b}{a} \frac{1}{2} \left[a^2 \text{arc sen} \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right]_0^a =$$

$$= 2 \frac{b}{a} (a^2 \text{ arc sen } 1 + 0 - a^2 \text{ arc sen } 0 - 0) = 2 \frac{b}{a} a^2 \frac{\pi}{2} = \pi a b. \ (^2)$$

135. – *Area del cerchio.*

Trattandosi di un caso particolare dell'ellisse ($a = b = r$) *l'area è:*

$$\text{area} = \pi r \cdot r = \pi r^2.$$

---

(1) cfr. integrale notevole Cap. XV, § 130, 55° esempio a pag. 210.

(2) Essendo: *arc sen* $1 = \dfrac{\pi}{2}$ e *arc sen* $0 = 0$ per $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \textit{arc sen } x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

136. – *Area di una regione di piano limitata da due o più curve.*

Utilissime, per la risoluzione di problemi sul calcolo delle aree, sono le seguenti considerazioni.

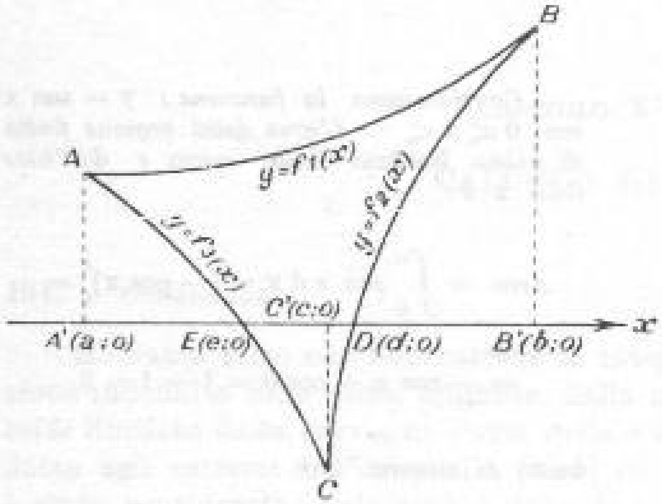

Fig. 119.

Siano date, per esempio, le tre funzioni:

$$y = f_1(x) \quad \text{con} \quad a \leqslant x \leqslant b,$$
$$y = f_2(x) \quad \text{con} \quad c \leqslant x \leqslant b,$$
$$y = f_3(x) \quad \text{con} \quad a \leqslant x \leqslant c.$$

Ci proponiamo di calcolare l'area della regione di piano da esse limitata e cioè (Fig. 119) l'area del triangolo mistilineo ABC. Indichiamo con:

d l'ascissa del punto D in cui la $f_2(x)$ incontra l'asse delle x;

e l'ascissa del punto E in cui la $f_3(x)$ incontra l'asse delle x.

L'area richiesta sarà data da:

Area = trapezoide $AA'B'B$ — area triang. mist. $AA'E$ + area triang. mist. $EC'C$ + + area triang. mist. $CC'D$ — area triang. mist. $DB'B$ =

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^e f_3(x)\,dx - \int_e^c f_3(x)\,dx - \int_c^d f_2(x)\,dx - \int_d^b f_2(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^c f_3(x)\,dx - \int_c^b f_2(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_b^c f_2(x)\,dx + \int_c^a f_3(x)\,dx.$$

Da ciò che precede deriva la seguente *regola pratica* per il calcolo dell'area della regione chiusa di piano limitata da due o più curve:

Si fissi, sul contorno dell'area, il senso ***orario*** *e, partendo da uno qualunque dei punti d'intersezione, si esegua la somma degli integrali definiti aventi:*

per estremo inferiore l'ascissa del punto di partenza;

per estremo superiore l'ascissa del punto di arrivo;

per funzione integranda l'equazione della linea sulla quale ci si sposta.

1) **Esempio.** Calcolare l'area della regione di piano limitata dalle due curve di equazione: $y = -x^2 + 4x$ e $y = x$.

Poste a sistema le due equazioni, i punti d'intersezione sono:

$$0\,(0\,;\,0) \quad e \quad A\,(3\,;\,3).$$

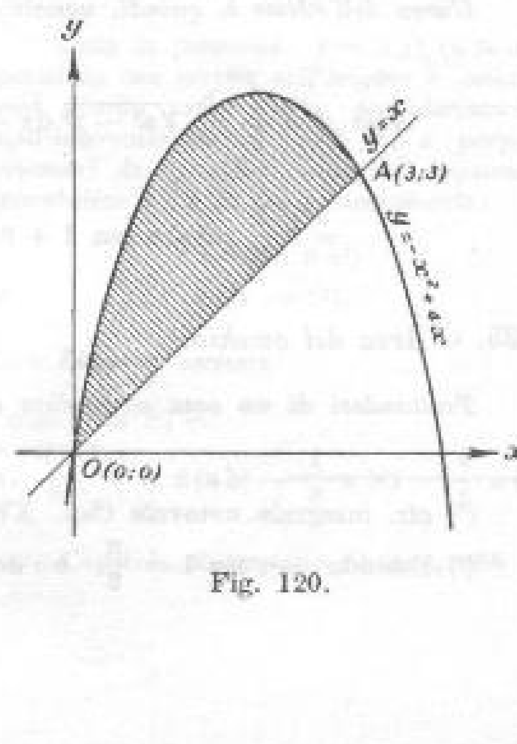

Fig. 120.

Applicando la precedente regola e partendo, per esempio, da O, abbiamo :

$$Area = \int_0^3 (-x^2+4x)\,dx + \int_3^0 x\,dx = \int_0^3 (-x^2+4x)\,dx - \int_0^3 x\,dx = \int_0^3 (-x^2+3x)\,dx =$$

$$= \left| -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right|_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} \text{ di unità di misura.}$$

2) **Esempio.** *Riprendiamo il problema assegnato alla Maturità Scientifica nella Ia sessione del 1936, problema quasi interamente risolto a pag. 138 e successive e del quale ci rimane da calcolare* « l'area della parte di piano limitata dagli archi delle due parabole i quali hanno per estremi i punti d'incontro delle parabole stesse ».

Si tratta delle due parabole di equazione: $y = x^2 - 2x$ *e* $y = 2x - \frac{x^2}{2}$ *aventi in comune i due punti* $(0\,;0)$ *e* $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{16}{9}\right)$ *e rappresentate in Fig. 74 a pagina 139. Sempre in base alla precedente regola pratica, partendo dall'origine, abbiamo :*

$$Area = \int_0^{\frac{8}{3}} \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) dx + \int_{\frac{8}{3}}^0 (x^2 - 2x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{8}{3}} \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) dx - \int_0^{\frac{8}{3}} (x^2 - 2x)\,dx = \int_0^{\frac{8}{3}} \left(4x - \frac{3}{2}x^2\right) dx =$$

$$= \left| 2x^2 - \frac{1}{2}x^3 \right|_0^{\frac{8}{3}} = 2 \cdot \frac{64}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{512}{27} = \frac{128}{27},$$

di unità di misura.

3) **Esempio.** *Riprendiamo, infine, il problema assegnato alla* Maturità Scientifica nella IIa sessione del 1960 *e parzialmente risolto a pagina 165 e successive. Ci rimane ancora da calcolare :*

a) « per ciascuna curva le aree delle regioni finite delimitate dalla curva e dalle rette » $y = 0$ *e* $y = 1$.

Si tratta, come è stato detto, delle due funzioni algebriche razionali intere di equazione : $y = \frac{1}{4}x^3 - 6x^2 + \frac{189}{4}x - \frac{243}{2}$ *e* $y = \frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + \frac{45}{4}x + \frac{27}{2}$, *curve traslate l'una rispetto all'altra e rappresentate in Fig. 104 a pagina 168. Basterà calcolare l'area limitata da una di esse (per es. la seconda i cui coefficienti sono più semplici) e cioè :*

$$\text{Area} = \int_{-6}^{-3} \left(\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + \frac{45}{4}x + \frac{27}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{16}x^4 + x^3 + \frac{45}{8}x^2 + \frac{27}{2}x\right]_{-6}^{-3} =$$

$$= \left(\frac{81}{16} - 27 + \frac{405}{8} - \frac{81}{2}\right) - \left(81 - 216 + \frac{405}{2} - 81\right) = -\frac{189}{16} + \frac{27}{2} = \frac{27}{16} \text{ di unità di misura.}$$

b) « l'area della regione parabolica i cui punti hanno ordinata positiva e non maggiore di quella del predetto punto di massimo ».

Si tratta, quindi, dell'area delimitata dalla parabola : $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{15}{2}x - 27$ *e dalle rette :* $y = 0$ *e* $y = 1$. *Trattandosi di una figura simmetrica rispetto all'asse della parabola, abbiamo :*

$$Area = 2\int_6^7 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{15}{2}x - 27\right) dx + 2\int_7^{\frac{15}{2}} dx =$$

$$= 2\left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{15}{4}x^2 - 27x\right]_6^7 + 2\Big[x\Big]_7^{\frac{15}{2}} =$$

$$= 2\left(-\frac{343}{6} + \frac{735}{4} - 189\right) - 2\,(-36 + 135 - 162) + 2 \cdot \frac{15}{2} - 2 \cdot 7 =$$

$$= -\frac{749}{6} + 126 + 15 - 14 = \frac{13}{6} \textit{ di unità di misura.}$$

Allo stesso risultato si può anche giungere applicando, in questo caso, il teorema di Archimede :

$$Area = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{9}{8} - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{4} - \frac{1}{12} = \frac{13}{6} \textit{ di unità di misura.}$$