CAPITOLO XVII (*)

CALCOLO DI VOLUMI

137. – *Generalità.*

Siano α e β i due piani paralleli limitanti il solido V e perpendicolari [1] ad una retta orientata qualunque (asse delle x) e siano a e b, rispettivamente, le ascisse dei punti in cui i suddetti piani tagliano l'asse. Considerato un punto gene-

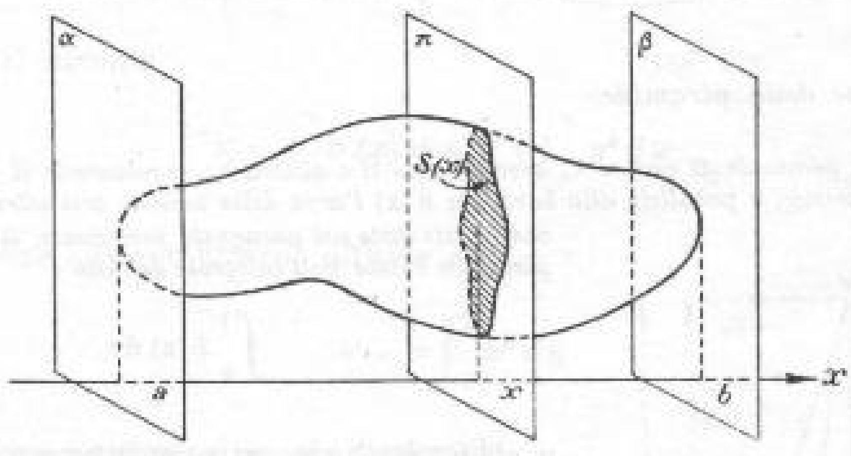

Fig. 121.

rico x interno all'intervallo $[a\,;\,b]$, conduciamo per esso il piano π parallelo ad α (e, quindi, a β) e sia $S(x)$ l'area della sezione di solido così ottenuta. Tale area è, ovviamente, una funzione continua di x ed esiste, quindi, l'integrale:

$$\int_a^b S(x)\,dx.$$

Ci proponiamo di far vedere che tale integrale ci permette di calcolare il volume del solido in oggetto.

(*) Gli esercizi, i problemi e i complementi relativi al presente Capitolo si trovano da pag. 368 a pag. 378.

[1] L'asse di riferimento potrebbe essere anche obliquo rispetto ai due piani nel qual caso le considerazioni che seguiranno dovranno essere mutate, almeno formalmente, diventando più complesse. La precedente ipotesi è stata posta, quindi, per semplicità.

Basterà, infatti, dividere l'intervallo $[a\,;\,b]$ in n parti $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, condurre, per ognuno dei punti di suddivisione, il piano parallelo ad α, indicare con $S_m(x_1), S_m(x_2), \ldots, S_m(x_n)$ la sezione minima in ciascuno degli intervalli parziali, con $S_M(x_1), S_M(x_2), \ldots, S_M(x_n)$ la sezione massima in ciascuno degli intervalli parziali e costruire:

1° i cilindri di base $S_m(x_k)$ e altezza Δx_k $\quad (k = 1, 2, \ldots, n)$;
2° i cilindri di base $S_M(x_k)$ e altezza Δx_k $\quad (k = 1, 2, \ldots, n)$,

per ottenere, in tal guisa, due somme che tendono allo stesso limite (volume del solido) al tendere a zero del maggiore degli intervalli parziali Δx. Per la generalizzazione del problema dell'integrazione definita (cfr. Cap. XIV, § 109), il volume del solido è dato da:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx \qquad (137\,;\,1)$$

in cui *la funzione* $S(x)$ *è l'area di una sezione generica del solido.*

138. – *Volume della piramide.*

Sia data la piramide di vertice V, *area di base* B *e altezza* h; *conducendo il piano* α, *alla distanza* x *dal vertice, e parallelo alla base, sia* S(x) *l'area della sezione così ottenuta. Per ciò che è stato detto nel paragrafo precedente, il volume della piramide è dato dall'integrale definito:*

$$\int_0^h S(x)\,dx.$$

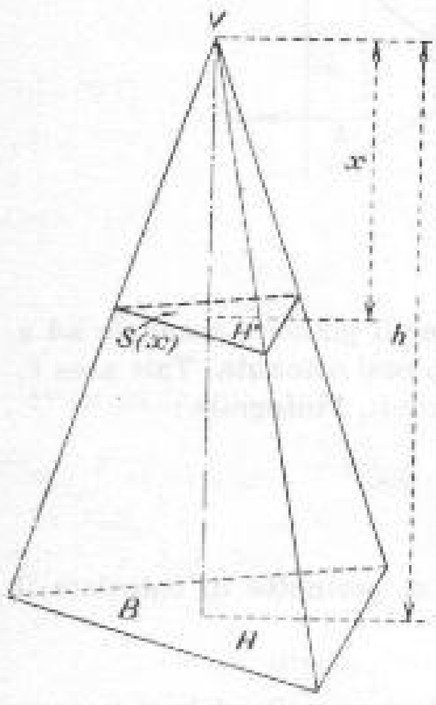

Fig. 122.

Ricordando che, per un noto teorema di geometria solida [1], *esiste la proporzione:*

$$S(x) : B = \overline{VH'}^2 : \overline{HV}^2 \qquad \textit{cioè} \qquad S(x) = \frac{B\,x^2}{h^2},$$

l'integrale diventa:

$$\textit{Volume} = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{B\,x^2}{h^2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{B}{h^2}\,\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{B}{h^2}\,\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\,B\,h,$$

nota formula per il calcolo del volume di una piramide.

(1) Vedere nota a pag. 67.

139. – *Solidi di rotazione.*

Essendo i più frequenti, i solidi di rotazione meritano una trattazione a parte. Sia data la funzione $y = f(x)$ monodroma e continua in un intervallo $[a\,;\,b]$. Ci proponiamo di calcolare il volume del solido generato dal tratto limitato di curva in una rotazione completa attorno all'asse delle x [o attorno all'asse delle y se la funzione $y = f(x)$ è univocamente invertibile con funzione inversa: $x = \varphi(y)$, definita per $a' \leqslant y \leqslant b'$].

Trattandosi di un solido di rotazione la sezione ottenuta con un piano perpendicolare all'asse di rotazione è un cerchio di area:

$$S(x) = \pi\,[f(x)]^2 = \pi\,y^2$$

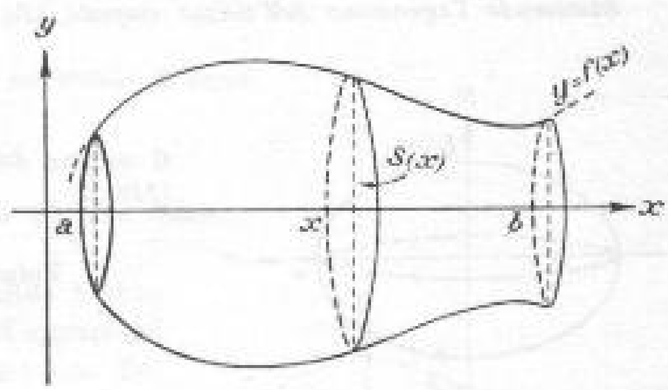

Fig. 123.

e la (137 ; 1) diventa:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx = \pi \int_a^b y^2\,dx \qquad (139\,;\,1)$$

se la rotazione avviene attorno all'asse delle x e:

$$V = \pi \int_{a'}^{b'} x^2\,dy \qquad (139\,;\,2)$$

se la rotazione avviene attorno all'asse delle y.

140. – *Volume dell'ellissoide e della sfera.*

Dicesi *ellissoide* il solido ottenuto facendo ruotare, di un giro completo, un'ellisse attorno ad un suo asse.

Lo diremo *ellissoide «allungato»* se la rotazione avviene attorno all'asse maggiore, *ellissoide «schiacciato»* se la rotazione avviene attorno all'asse minore.

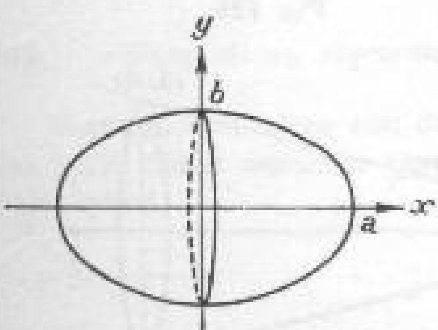

Fig. 124.

Sia data l'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cioè $\quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad$ *con* $\quad a > b.$

Il volume dell'ellissoide « allungato » è, in base alla (137 ; 1):

$$\text{Volume} = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a =$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

Risolvendo l'equazione dell'ellisse rispetto alla x^2 *e cioè:*

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2),$$

il volume dell'ellissoide « schiacciato » è, in base alla (139 ; 2):

$$\text{Volume} = 2\pi \int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)\,dy =$$

$$= 2\pi \frac{a^2}{b^2}\left[b^2 y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^b =$$

$$= 2\pi \frac{a^2}{b^2}\left(b^3 - \frac{1}{3}b^3\right) = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

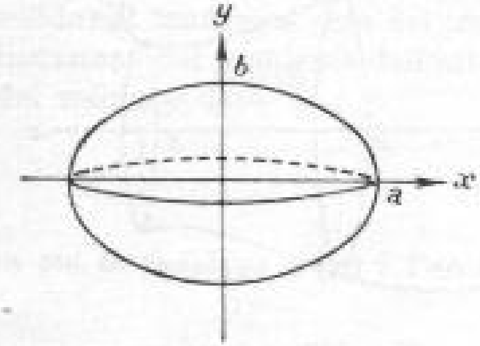

Fig. 125.

Poichè, infine, la sfera è un caso particolare dell'ellissoide di rotazione ($a = b = r$), *abbiamo la nota formula:*

$$\text{Volume} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

141. – *Volume del cono.*

Sia data la retta passante per l'origine e per il punto (h ; r), *retta di equazione:* $y = \frac{r}{h}x$.

Facendo ruotare la figura di un giro completo attorno all'asse delle x *otteniamo il cono di raggio* r *e altezza* h *e il cui volume è:*

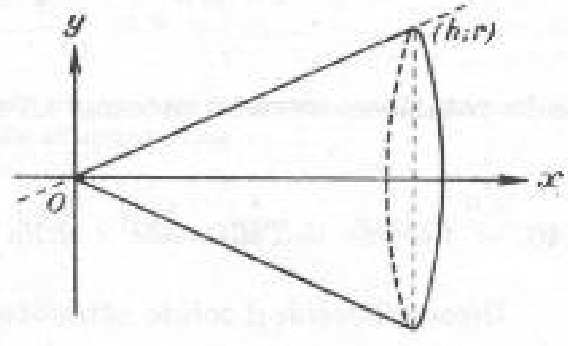

Fig. 126.

$$\text{Volume} = \pi \int_0^h y^2\,dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx =$$

$$= \pi \frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

nota formula per il calcolo del volume di un cono.

142. – *Volume del tronco di cono.*

Sia data la retta passante per i due punti (O ; r) *e* (h ; R), *retta di equazione:* $y = \frac{R - r}{h}x + r$ *e della quale considereremo il solo segmento limitato dai suddetti punti;*

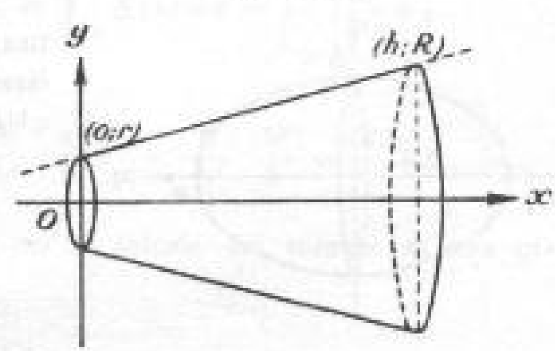

Fig. 127.

ruotando attorno all'asse delle x, esso genera il tronco di cono di altezza h *e raggi di base* R *e* r. *In base alla (139 ; 1) il volume è:*

$$Volume = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^2 dx = \frac{\pi h}{R-r}\int_r^R t^2\,dt = (^1) = \frac{\pi h}{R-r}\left[\frac{t^3}{3}\right]_r^R =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h \frac{R^3-r^3}{R-r} = \frac{1}{3}\pi h (R^2+r^2+Rr),$$

nota formula per il calcolo del volume di un tronco di cono.

143. – *Volume di un segmento sferico ad una base.*

Secando una sfera con un piano, i due solidi così ottenuti si dicono *segmenti sferici ad una base* ed hanno per altezza la distanza del loro vertice dal piano.

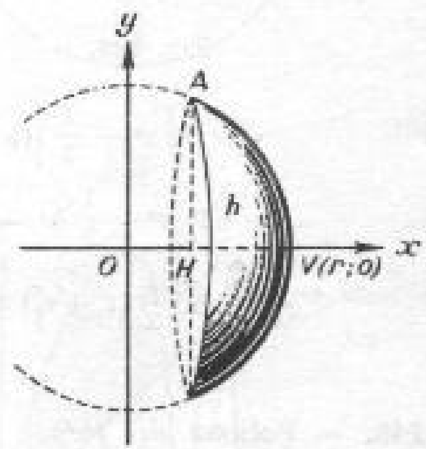

Fig. 128.

Sia data la circonferenza di equazione: $x^2 + y^2 = r^2$ *e della quale consideriamo il solo arco limitato dai punti:*

$$A\left[r-h\,;\,\sqrt{h(2r-h)}\right] \quad e \quad V(r\,;\,O)$$

essendo h *la lunghezza del segmento* HV.

Facendo ruotare la figura, di un giro completo attorno all'asse delle x, *otteniamo un segmento sferico ad una base di vertice* V *e altezza* h *e il cui volume è:*

$$Volume = \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \pi \left| r^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right|_{r-h}^{r} = \pi \left| \frac{2}{3}r^3 - r^2(r-h) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}(r-h)^3 \right| = \pi\left(r h^2 - \frac{1}{3}h^3\right) = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r-h).$$

144. – *Volume di un segmento sferico a due basi.*

Secando una sfera con due piani paralleli, la parte di sfera compresa tra i due piani dicesi *segmento sferico a due basi*; ha per altezza la distanza tra i i due piani.

(1) È stata posta la sostituzione $\frac{R-r}{h}x + r = t$ da cui $dx = \frac{h}{R-r}dt$; sarà: per $x = 0$, $t = r$ e per $x = h$, $t = R$.

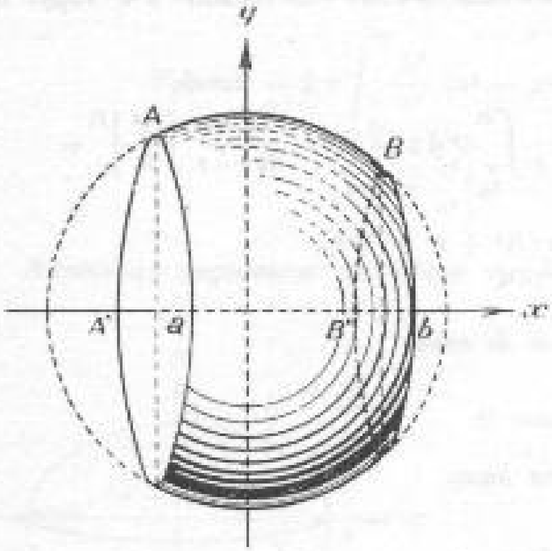

Fig. 129.

Sia data la circonferenza di equazione: $x^2+y^2=r^2$ *e della quale consideriamo il solo arco* AB *limitato dai punti di ascissa, rispettivamente,* a *e* b. *Facendo ruotare la figura, di un giro completo attorno all'asse delle* x, *otteniamo un segmento sferico a due basi di raggi* $r_1 = \overline{AA'}$ *od* $r_2 = \overline{BB'}$ *e altezza* $h = \overline{A'B'}$. *Il volume è:*

$$Volume = \pi \int_a^b (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left| r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right|_a^b =$$

$$= \pi \left| r^2 b - \frac{1}{3} b^3 - r^2 a + \frac{1}{3} a^3 \right| =$$

$$= \pi \left| r^2 (b - a) - \frac{1}{3} (b^3 - a^3) \right| =$$

$$= \pi (b - a) \left| r^2 - \frac{1}{3} (b^2 + a^2 + ab) \right| =$$

$$= \pi h \left\{ r^2 - \frac{1}{3} \left| (b - a)^2 + 3ab \right| \right\} = \pi h \left| r^2 - \frac{1}{3} (h^2 + 3ab) \right| =$$

$$= \pi h \left| r^2 - \frac{1}{3} h^2 - ab \right| = (^1) = \pi h \left| \frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{2} h^2 + ab - \frac{1}{3} h^2 - ab \right| =$$

$$= \pi h \left| \frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{6} h^2 \right| = \frac{1}{6} \pi h \left| 3 (r_1^2 + r_2^2) + h^2 \right|.$$

145. – *Volume del toro.*

Dicesi *toro* il solido (ad anello rotondo) che si ottiene facendo ruotare un cerchio attorno ad una retta del suo piano esterna al cerchio.

Consideriamo la circonferenza di centro (O ; R) *e raggio* r *(con* $R > r$*), circonferenza di equazione:*

$$x^2 + (y - R)^2 = r^2$$

e della quale considereremo le due semicirconferenze:

$$y = R + \sqrt{r^2 - x^2}$$

e

$$y = R - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

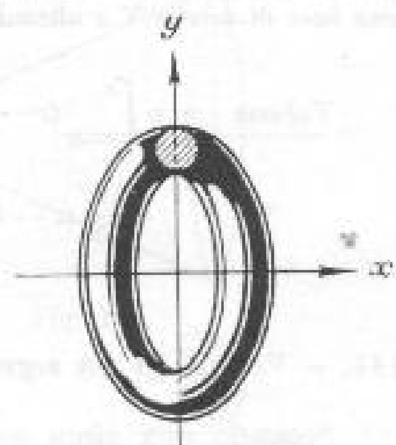

Fig. 130.

(¹) Essendo: $r^2 = r_1^2 + a^2$ e $r^2 = r_2^2 + b^2$, è anche:

$$r^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + a^2 + b^2}{2} = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) + \frac{(b-a)^2 + 2ab}{2} = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) + \frac{1}{2} h^2 + ab.$$

Il volume del toro è:

$$\textit{Volume} = 2\left[\pi\int_0^r (\mathrm{R}+\sqrt{\mathrm{r}^2-\mathrm{x}^2})^2\,\mathrm{d\,x} - \pi\int_0^r (\mathrm{R}-\sqrt{\mathrm{r}^2-\mathrm{x}^2})^2\,\mathrm{d\,x}\right] =$$

$$= 8\,\pi\,\mathrm{R}\int_0^r \sqrt{\mathrm{r}^2-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{d\,x} = (^1) = 8\,\pi\,\mathrm{R}\,\frac{\pi\,\mathrm{r}^2}{4} = 2\,\pi^2\,\mathrm{r}^2\,\mathrm{R}.$$

146. – *Volume generato dalla rotazione di un arco di sinusoide.*

Consideriamo la funzione: $\mathrm{y} = \mathrm{sen\,x}$ *con* $0 \leqslant \mathrm{x} \leqslant \pi$. *La rotazione completa della figura attorno all'asse delle* x *genera un solido il cui volume è:*

$$\textit{Volume} = \pi\int_0^\pi \mathrm{sen}^2\,\mathrm{x\,d\,x} = (^2)$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}\,(\mathrm{x}-\mathrm{sen\,x\cos x})\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\,\pi^2\ \textit{unità di misura.}$$

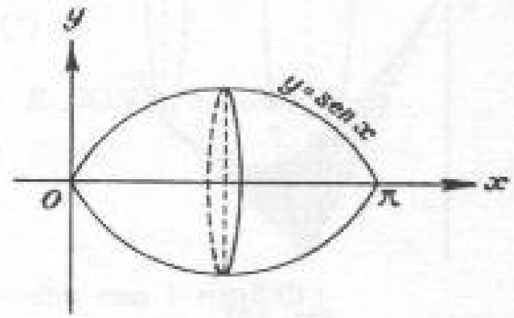

Fig. 131.

147. – *Problemi sui solidi di rotazione.*

1) Calcolare il volume generato da una rotazione completa, attorno all'asse delle x, della regione di piano limitata dalle due curve di equazione: $y = -x^2 + 4x$ e $y = x$.

La parabola e la retta hanno in comune i due punti $(\mathrm{O}\,;\,\mathrm{O})$ *e* $(3\,;\,3)$. *Il volume del solido è:*

$$\textit{Volume} = \pi\int_0^3(-\mathrm{x}^2+4\,\mathrm{x})^2\mathrm{d\,x} - \pi\int_0^3 \mathrm{x}^2\,\mathrm{d\,x} =$$

$$= \pi\int_0^3 (\mathrm{x}^4 - 8\,\mathrm{x}^3 + 15\,\mathrm{x}^2)\,\mathrm{d\,x} =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}\,\mathrm{x}^5 - 2\,\mathrm{x}^4 + 5\,\mathrm{x}^3\right]_0^3 = \pi\left(\frac{243}{5} - 162 + 135\right) =$$

$$= \frac{108}{5}\,\pi\ \textit{unità di volume.}$$

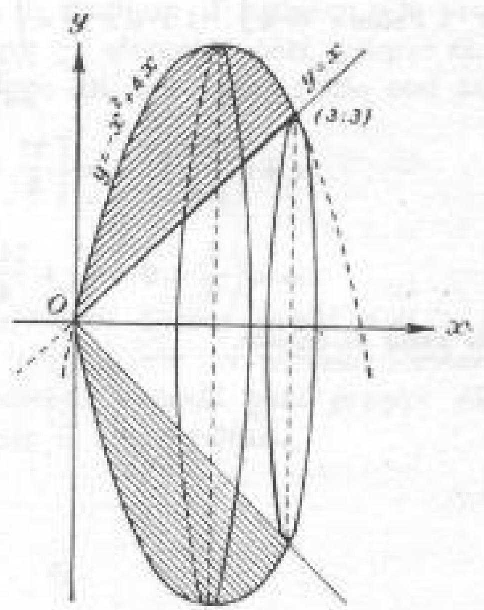

Fig. 132.

2) Data la parabola di equazione: $y = -\dfrac{1}{2}\,x^2 + 2\,x$ se ne consideri l'arco limitato dall'origine e dal punto $A\left(3\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$ e condotta la tangente in O e in A, sia B il

(1) Vedere l'integrale notevole (55° esempio, § 130 a pag. 210) già adoperato per il calcolo dell'area dell'ellisse.

(2) 19° esempio al Cap. XV, § 123, pag. 195.

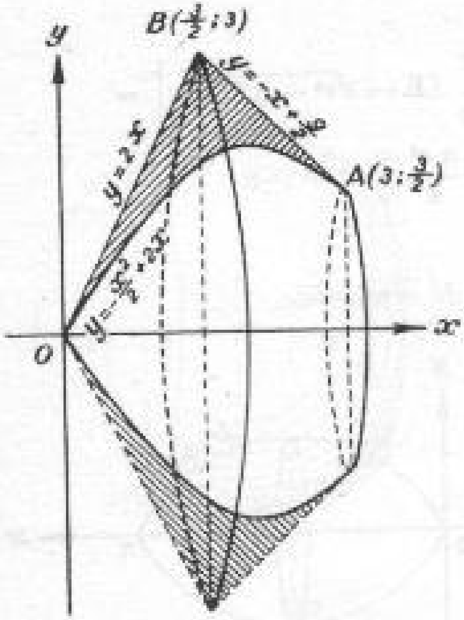

Fig. 133.

loro punto d'intersezione. Si chiede il volume del solido generato, in una rotazione completa attorno all'asse delle x, dal triangolo mistilineo OAB.

Essendo $y' = -x + 2$, *il coefficiente angolare della tangente* :

in O *è*: *per* $x = 0$, $y' = 2$

e la tangente ha l'equazione: $y = 2x$;

in A *è*: *per* $x = 3$, $y' = -1$

e la tangente ha l'equazione: $y = -x + \dfrac{9}{2}$.

Poste a sistema le equazioni delle due tangenti, abbiamo le coordinate di B :

$$B\left(\frac{3}{2}\,;\,3\right).$$

Il volume richiesto è :

$$\textit{Volume} = \pi\int_0^{\frac{3}{2}} 4\,x^2\,dx + \pi\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(-x+\frac{9}{2}\right)^2 dx - \pi\int_0^3\left(-\frac{1}{2}x^2+2\,x\right)^2 dx =$$

$$= 4\,\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{2}} + \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{9\,x^2}{2} + \frac{81\,x}{4}\right]_{\frac{3}{2}}^{3} - \pi\left[\frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{2} + \frac{4\,x^3}{3}\right]_0^3 =$$

$$= \pi\left(\frac{9}{2} + 9 - \frac{81}{2} + \frac{243}{4} - \frac{9}{8} + \frac{81}{8} - \frac{243}{8} - \frac{243}{20} + \frac{81}{2} - 36\right) = \frac{189}{40}\,\pi$$

di unità di volume.