COLLANA
PITAGORA

Esercitazioni di matematica

14
Geometria dello spazio

Pitagora
Editrice
Bologna

Testo Dott. Bruno D'Amore.
Redazione Ing. M. Mandrioli.
Realizzazione e stampa Officine grafiche Pitagora-Tecnoprint, via Barelli 4H, Bologna.
Codice 11-29.
© *Copyright* 1975 Pitagora Editrice, via Zamboni 57, Bologna.
Tutti i diritti riservati.
Riproduzione, anche parziale, vietata.

Indice

Capitolo 4 - GEOMETRIA DELLO SPAZIO

4.1 Equazione di un piano 145
4.2 Equazione di un fascio di piani. Stella di piani 146
4.3 Equazioni di una retta 147
4.4 Condizione di complanarità di due rette 148
4.5 Distanza di due punti 149
4.6 Coseni direttori di una retta orientata. Coseno dell'angolo di due rette orientate 149
4.7 Equazione normale di un piano. Coseni direttori di una retta normale ad un piano 150
4.8 Distanza di un punto da un piano 151
4.9 Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra piani, tra rette, tra piani e rette 152
4.10 Distanza di un punto da una retta 154
4.11 Area del triangolo 155
4.12 Elementi impropri. Coordinate cartesiane omogenee 155
4.13 Cilindro, cono, sfera 156

4

Geometria dello spazio

4.1 Equazione di un piano.

La condizione di complanarità di quattro punti $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ è data da

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante si deduce che la relazione sopra indicata ha la forma

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{4.1}$$

Ogni equazione di questo tipo rappresenta, in un riferimento cartesiano tridimensionale, un piano. Moltiplicando i coefficienti a, b, c, d della (4.1) per uno stesso fattore (diverso da 0) il piano non cambia.

Se nella (4.1) manca una delle coordinate, il piano è parallelo all'asse avente il nome della coordinata mancante e passa per esso se $d = 0$. Se invece mancano due delle coordinate, il piano è parallelo al piano avente il nome delle variabili mancanti nell'equazione; in particolare, coincide con esso se $d = 0$.

Ponendo

$$p = -\frac{d}{a}, \quad q = -\frac{d}{b}, \quad r = -\frac{d}{c},$$

la (4.1) assume la forma

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

Questa viene detta *equazione segmentaria* del piano in quanto i valori p, q ed r indicando le misure dei segmenti staccati, a partire dall'origine, sugli assi coordinati.

4.2 Equazione di un fascio di piani. Stella di piani.

Si definisce *fascio di piani* la totalità dei piani dello spazio passanti per una retta (*asse del fascio*), o anche la totalità dei piani paralleli ad un piano dato.

Se $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, sono le equazioni di due piani appartenenti al fascio, l'equazione del fascio è del tipo

$$\mu(ax + by + cz + d) + \lambda(a'x + b'y + c'z + d') = 0.$$

Se

$$\begin{aligned} &ax + by + cz + d = 0\,, \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0, \\ &a''x + b''x + c''z + d'' = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

sono le equazioni di tre piani distinti, condizione necessaria e sufficiente affinchè essi appartengano ad uno stesso fascio è che la matrice

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{Vmatrix}$$

abbia caratteristica $\leqslant 2$.

Si chiama *stella di piani* la totalità dei piani dello spazio passanti per uno stesso punto (centro della stella) o anche la totalità dei piani paralleli ad una retta data. Se le (4.2) sono le equazioni di tre piani non appartenenti ad uno stesso fascio, l'equazione della stella da essi individuata è del tipo

$$\begin{aligned} &\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') + \\ &+ \nu(a''x + b''y + c''z + d'') = 0\,. \end{aligned}$$

Se

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0\,, \tag{4.3}$$

$$(4.3) \qquad a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \qquad a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0,$$

sono le equazioni di quattro piani distinti, condizione necessaria e sufficiente affinchè appartengano alla stessa stella è che

$$(4.4) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = 0.$$

4.3 Equazioni di una retta.

Affinchè tre punti $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, siano allineati, la matrice

$$(4.5) \qquad \begin{Vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{Vmatrix}$$

deve avere caratteristica < 3.

Dato che quanto detto impone che siano nulli tutti i minori del terzo ordine estratti dalla (4.5), la condizione di allineamento di tre punti, supposto $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$, può anche essere posta sotto la seguente forma equivalente:

$$(4.6) \qquad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Se $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 \neq z_2$, i piani $x = x_1$ ed $y = y_1$ individuano la retta richiesta che avrà quindi equazioni

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 . \end{cases}$$

Se $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ e $z_1 \neq z_2$, la retta ha le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \end{cases} .$$

Ponendo $x_2 - x_1 = l$, $y_2 - y_1 = m$, $z_2 - z_1 = n$ (l, m ed n sono detti *coefficienti direttivi*) le (4.6) diventano

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} . \tag{4.7}$$

Le (4.7) prendono il nome di *equazioni frazionarie della retta.*

Una retta dello spazio può essere considerata, oltre che congiungente due punti, come intersezione di due piani; quindi può essere rappresentata da un sistema del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 . \end{cases} \tag{4.8}$$

In particolare, una retta non parallela al piano xy, si può, ad esempio, considerare individuata dall'intersezione di due piani paralleli agli assi x ed y e quindi può essere rappresentata da equazioni del tipo

$$\begin{cases} x = gz + p \\ y = hz + q . \end{cases} \tag{4.9}$$

Le (4.9) prendono il nome di *equazioni cartesiane ridotte dalla retta,* mentre le (4.8) si dicono *equazioni cartesiane generali della retta.*

4.4 Condizione di complanarità di due rette.

Due rette sono complanari se i piani che le individuano appartengono ad una stessa stella, quindi deve essere nullo il determinante formato dai coefficienti delle loro quattro equazioni.

Se le due rette sono rappresentate da equazioni ridotte:

$$\begin{cases} x = gz + p \\ y = hz + q, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = g'z + p' \\ y = h'z + q' , \end{cases} \tag{4.10}$$

la condizione di complanarità è data da

$$(g-g')(q-q')=(h-h')(p-p').$$

Se, infine, le rette sono rappresentate da equazioni frazionarie

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}, \tag{4.11}$$

$$\frac{x-x_0}{l_0}=\frac{y-y_0}{m_0}=\frac{z-z_0}{n_0}, \tag{4.12}$$

la condizione di complanarità diventa

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \\ l_0 & m_0 & n_0 \end{vmatrix}=0 .$$

4.5 Distanza di due punti.

La distanza di due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ è data da

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} .$$

4.6 Coseni direttori di una retta orientata. Coseno dell'angolo di due rette orientate.

Si dicono coseni direttori di una retta orientata r i coseni degli angoli che essa forma con gli assi. Se la retta r è individuata dalle equazioni frazionarie (4.7) si ha

$$\cos xr=\frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \quad \cos yr=\frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos zr=\frac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}} .$$

Se la retta r è invece rappresentata dalle equazioni ridotte (4.9), risulta

$$\cos xr = \frac{g}{\pm\sqrt{g^2+h^2+1}}, \qquad \cos yr = \frac{h}{\pm\sqrt{g^2+h^2+1}},$$

$$\cos zr = \frac{1}{\pm\sqrt{g^2+h^2+1}}.$$

Sussiste poi la relazione

$$\cos^2 xr + \cos^2 yr + \cos^2 zr = 1 .$$

Il coseno dell'angolo formato da due rette orientate r ed s può essere individuato conoscendo i coseni direttori delle rette in questione. Se r ed s sono espresse in forma frazionaria, si ha infatti

$$\cos rs = \frac{l l_0 + m m_0 + n n_0}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{l_0^2+m_0^2+n_0^2}},$$

mentre se sono espresse in forma ridotta risulta

$$\cos rs = \frac{gg' + hh' + 1}{\pm\sqrt{g^2+h^2+1}\cdot\sqrt{g'^2+h'^2+1}}.$$

4.7 Equazione normale di un piano. Coseni direttori di una retta normale ad un piano.

L'equazione normale di un piano π ha la forma

$$x \cos xn + y \cos yn + z \cos zn - p = 0,$$

dove p rappresenta la distanza del piano dall'origine (fig. 4.1) e $\cos xn$, $\cos yn$, $\cos zn$ sono i coseni direttori di una retta normale a π.

Tale equazione individua anche l'orientazione scelta su π. Se il piano π è rappresentato da un'equazione del tipo (4.1) la sua equazione normale è data da

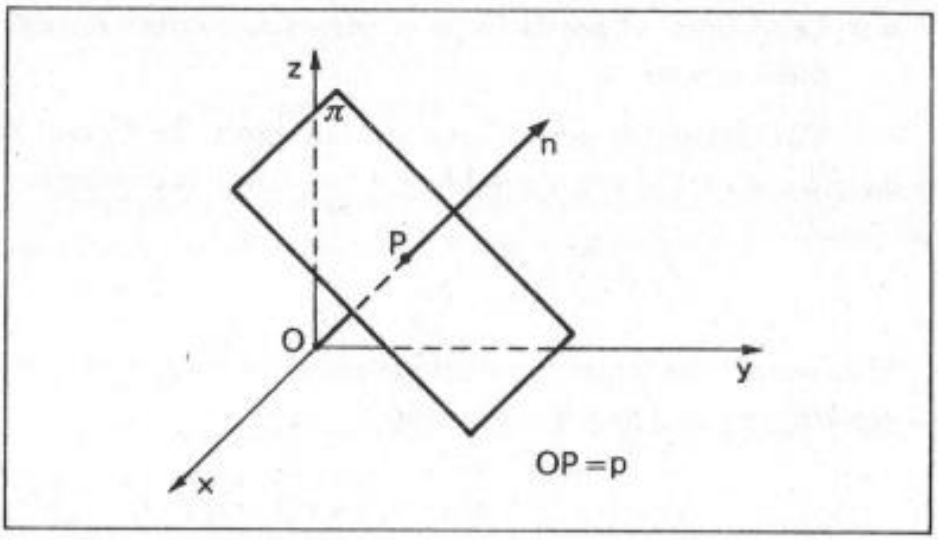

Figura 4.1

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0 .$$

Risulta inoltre che i coseni direttori di una retta normale al piano $ax + by + cz + d = 0$ sono

$$\cos xn = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos yn = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos zn = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$

4.8 Distanza di un punto da un piano.

Dato un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ qualsiasi dello spazio, la sua distanza da un piano $ax + by + cz + d = 0$ è data da

$$\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$

Nel caso particolare che il punto considerato coincida con l'origine la distanza in questione vale

$$\frac{d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$

4.9 Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra piani, tra rette, tra piani e rette.

Condizione di parallelismo tra due piani. Se i piani hanno equazioni $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, la condizione è data da

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} .$$

Si ha quindi che il piano parallelo al piano $ax + by + cz + d = 0$, e passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ ha per equazione

$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

logico

Condizione di parallelismo tra due rette. Se le due rette sono individuate dai piani aventi per equazioni le (4.3), la condizione di parallelismo si ottiene imponendo che i quattro piani siano paralleli ad una stessa retta, cioè che sia nulla la matrice formata dalle prime tre verticali del determinante (4.4).

Se le rette sono rappresentate dalle equazioni ridotte (4.10) deve essere

$$g = g', \qquad h = h' .$$

Se, infine, le rette sono individuate dalle equazioni frazionarie (4.11) deve essere

$$\frac{l}{l_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{n}{n_0} .$$

Condizione di parallelismo tra una retta e un piano. Se la retta è individuata dalle (4.8) e il piano ha equazione $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ la condizione è data da

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Se la retta è rappresentata dalle equazioni ridotte (4.9) ed il piano ha per equazione la (4.1), deve essere

$$ag + bh + c = 0 .$$

Se infine, la retta ha per equazioni le (4.7) ed il piano ha per equazione (4.1) deve essere

$$al + bm + cn = 0.$$

Condizione di perpendicolarità tra due piani. Se i due piani hanno equazioni $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'x + c'z + d' = 0$ la condizione è data da

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Condizione di perpendicolarità tra due rette. Se le rette sono rappresentate dalle equazioni ridotte deve essere

$$gg' + hh' + 1 = 0,$$

mentre se hanno per equazioni le (4.7) e

$$\frac{x - x_0}{l_0} = \frac{y - y_0}{m_0} = \frac{z - z_0}{n_0},$$

deve risultare

$$ll_0 + mm_0 + nn_0 = 0.$$

Condizione di perpendicolarità tra una retta e un piano. Se la retta ha per equazioni le (4.7) e il piano ha per equazione la (4.1) deve essere

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}.$$

Segue che la retta normale al piano di equazione (4.1) e passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ ha le equazioni

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

mentre il piano normale alla retta di equazioni (4.7) e passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ ha l'equazione

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0.$$

4.10 Distanza di un punto da una retta.

Sia $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto ed r una retta non appartenente ad A di equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 . \end{cases}$$

Per determinare la distanza tra A ed r, occorre individuare il punto B di r per cui passa il piano α condotto da A perpendicolare ad r (fig. 4.2).

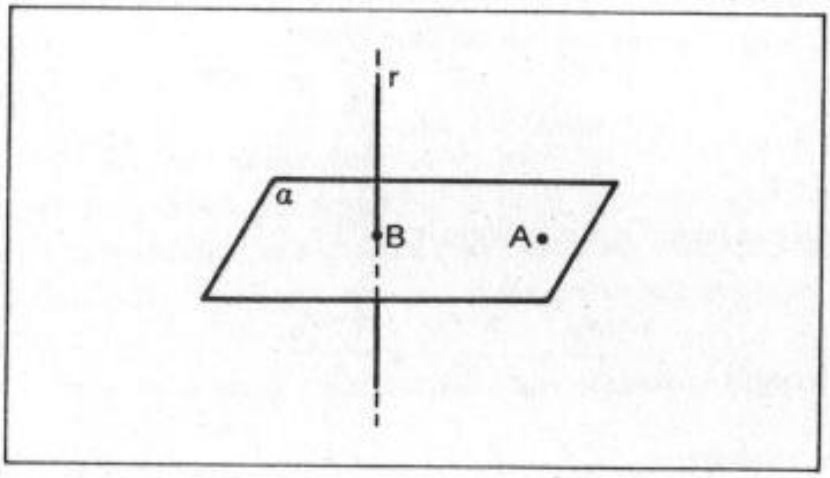

Figura 4.2

I coefficienti direttivi di r siano l, m, n. Com'è noto, se

$$\begin{Vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{Vmatrix}$$

è la matrice dei coefficienti delle equazioni che individuano r,

$$l : m : n = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} . \tag{4.34}$$

Determinati l, m, n, si ha che, a meno di un fattore di proporzionalità non nullo,

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

è l'equazione del piano α. Considerando il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0 \ , \end{cases}$$

si determina B, quindi applicando la formula della distanza, si trova $\overline{AB}$.

4.11 Area del triangolo.

L'area del triangolo avente per vertici i punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ è espressa dalla relazione

$$\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2}.$$

4.12 Elementi impropri. Coordinate cartesiane omogenee.

In modo perfettamente analogo al caso visto nella geometria piana si dice che, nello spazio, due rette sono parallele tra loro se hanno lo stesso punto improprio. Quando due piani sono paralleli, cioè hanno la stessa giacitura, si dice invece che hanno la stessa retta impropria. La totalità dei punti e delle rette improprie dello spazio si dice poi che formano il piano improprio dello spazio.

Anche in questo caso per rappresentare analiticamente gli enti geometrici sopra indicati, dovremo servirci di un tipo particolare di coordinate: le coordinate cartesiane omogenee. Diciamo *coordinate cartesiane omogenee* di un punto $P(x, y, z)$ quattro numeri x_0, x_1, x_2, x_3, con $x_0 \neq 0$ tali che

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \qquad y = \frac{x_2}{x_0}, \qquad z = \frac{x_3}{x_0}. \tag{4.13}$$

Si vede che, dati x, y, z, si possono determinare in infiniti modi quattro numeri x_0, x_1, x_2, x_3 tali da soddisfare le (4.13); basta infatti dare un valore qualsiasi non nullo ad x_0 e ricavare poi con le (4.13) i valori di x_1, x_2, x_3. Viceversa, noti x_0, x_1, x_2, x_3, si ottiene una sola terna di valori x, y, z soddisfacenti le (4.13).

Un punto improprio è rappresentato dalla quaterna $x_0 = 0, x_1, x_2, x_3$, equivalente a $0, \rho x_1, \rho x_2, \rho x_3$, dove x_1, x_2, x_3 non sono tutti nulli. Il punto improprio della retta avente per equazioni le (4.13) ha per coordinate $0, l, m, n$.

Essendo l'equazione del piano improprio $x_0 = 0$, la retta impropria del piano $ax + bx + cz + d = 0$ ossia del piano avente in coordinate omogenee

l'equazione $ax_1 + by_2 + cz_3 + dx_0 = 0$ è rappresentata dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

o anche

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0. \\ x_0 = 0. \end{cases}$$

Si ha poi che, affinchè quattro punti impropri $P_1(x_0, x_1, x_2, x_3)$, $P_2(y_0, y_1, y_2, y_3)$, $P_3(z_0, z_1, z_2, z_3)$, $P_4(t_0, t_1, t_2, t_3)$ siano complanari, deve essere

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_0 \end{vmatrix} = 0.$$

4.13 Cilindro, cono, sfera.

Si dice *cilindro* il luogo delle ∞^1 rette (dette generatrici) parallele ad una retta data e condotte per gli ∞^1 punti di una curva $\mathscr{C}$) (detta direttrice).

Si dimostra che, uguagliando a zero una funzione arbitraria di due polinomi lineari L, M nelle coordinate x, y, z, si ottiene l'equazione di un cilindro avente le generatrici parallele alla retta di equazioni

$$\begin{cases} L = 0, \\ M = 0. \end{cases}$$

In particolare, un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$ (che nel piano x, y sappiamo rappresenta una curva), nello spazio individua un cilindro avente per generatrici le rette parallele all'asse z e passanti per i punti della curva

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0\,. \end{cases}$$

Si definisce *cono* il luogo delle ∞^1 rette (dette generatrici) congiungenti

gli ∞^1 punti di una curva con un punto dato V (detto *vertice*).

Uguagliando a zero una funzione omogenea di tre polinomi lineari L, M, N, nelle coordinate cartesiane x, y, z, si ha l'equazione di un cono avente il vertice coincidente col punto di intersezione dei tre piani $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$. In particolare un'equazione del tipo $f(x, y, z) = 0$ dove $f(x, y, z)$ è una funzione omogenea di grado n, rappresenta l'equazione di un cono avente il vertice coindicente con l'origine degli assi.

Cilindro e cono sono esempi di *superfici rigate*. Una superficie è detta *rigata* quando è costituita da un insieme di rette soddisfacenti ad una data condizione.

Diciamo, infine, *sfera* il luogo dei punti dello spazio la cui distanza da un punto fisso è costante. Essa è rappresentata da un'equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0.$$

Le coordinate del centro sono date da

$$-\frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2}, \quad -\frac{c}{2},$$

mentre il raggio vale

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d} \quad .$$

Dato un punto $C(a, b, c)$ e una distanza r, la sfera avente centro C e raggio r ha l'equazione:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

La sfera è una superficie algebrica del secondo ordine, dunque una quadrica, come vedremo.

4.14 Generalità sulle superfici e sulle curve sghembe.

Se, data un'equazione del tipo

$$f(x, y, z) = 0 \tag{4.14}$$

nelle tre variabili reali x, y, z, consideriamo gli ∞^2 punti dello spazio le cui coordinate soddisfano l'equazione stessa, vediamo che l'insieme di questi costituisce una superficie che si dice appunto rappresentata dall'equazione

(4.14) (*equazione cartesiana* della superficie).

Una superficie può essere rappresentata anche da un'equazione del tipo

$$z = \varphi(x, y). \tag{4.15}$$

La (4.15) viene detta forma *esplicita* dell'equazione di una superficie.

Se $f(x, y, z) = 0$ è un polinomio in x, y, z, la superficie individuata viene chiamata *algebrica* e il grado del polinomio $f(x, y, z)$ viene detto ordine della superficie.

Tre superfici algebriche di ordine m, n, p non passanti per una stessa curva hanno $m \cdot n \cdot p$ punti in comune (*teorema di Bézout* per le superfici).

Spesso una superficie anzichè essere individuata da un'equazione del tipo (4.14) o (4.15) viene rappresentata mediante espresssioni del tipo

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = \varphi(u, v) \\ z = \psi(u, v), \end{cases} \tag{4.16}$$

dove f, φ, ψ, sono funzioni continue ad un sol valore dei due parametri indipendenti u e v. Le (4.16) sono dette equazioni parametriche ordinarie della superficie; l'equazione cartesiana (4.14) si ottiene eliminando fra le (4.16) i parametri u e v. Se, in particolare, le (4.16) sono lineari in u e v, la superficie individuata è un piano.

Attenzione. Non è detto che le (4.16) esprimono sempre le equazioni di una superficie, qualunque siano f, φ, ψ. Affinchè non siano invece le equazioni di una curva, occorre che la matrice

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{Vmatrix}$$

abbia caratteristica 2, cioè non siano tutti nulli i minori del secondo ordine da essa estratti.

Esempio. Siano

$$\begin{cases} x = u^2 - 2uv + v^2 - 1 \\ y = 2u + 2 - 2v \\ z = u - v + 1 \end{cases}$$

le equazioni di un dato ente geometrico nello spazio. Si tratta di una superficie?

Essendo

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2u - 2v\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = -2u + 2v,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 2\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -2,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = 1, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial v} = -1,$$

consideriamo

$$M = \begin{Vmatrix} 2(u-v) & 2 & 1 \\ -2(u-v) & -2 & -1 \end{Vmatrix}.$$

La matrice M ha chiaramente caratteristica 1: dunque il sistema proposto rappresenta una curva; anzi, se poniamo $u - v = t$, si hanno le equazioni parametriche ordinarie ottenute con un solo parametro:

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = 2t + 2 \\ z = t + 1\,. \end{cases}$$

Oltre alle (4.16) esistono poi anche le cosiddette equazioni parametriche generalizzate di una superficie. Esse sono del tipo

$$\begin{cases} f(x, y, z; u) = 0 \\ \varphi(x, y, z; u) = 0 \end{cases}$$

o del tipo

$$\begin{cases} f(x, y, z; u, v) = 0 \\ \varphi(x, y, z; u, v) = 0 \\ \psi(x, y, z; u, v) = 0\,. \end{cases}$$

Anche in questi casi l'eliminazione del parametro (o dei parametri) posta alla individuazione della equazione cartesiana.

Fra le superfici hanno poi una particolare importanza, oltre alle già ricordate superfici rigate, luogo di ∞^1 rette, anche le superfici di rotazione, cioè quelle superfici descritte da una curva che ruoti attorno ad una retta fissa (asse).

Una curva dello spazio, in generale, può essere definita come il luogo dei punti comuni alle due superfici di equazioni

$$(4.17) \qquad \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Le (4.17) sono dette, appunto equazioni cartesiane della curva.

Se una curva può considerarsi come intersezione completa di due superfici algebriche di ordine m ed n viene chiamata algebrica; il valore $m \cdot n$ viene detto ordine della curva. Si ha anche che una curva di questo tipo viene intersecata da un piano generico dello spazio in $m \cdot n$ punti reali o immaginari, propri o impropri, distinti o coincidenti.

Spesso nella rappresentazione di una curva si esprimono le coordinate x, y, z mediante funzioni ad un solo valore di una variabile ausiliaria u ponendo

$$(4.18) \qquad \begin{cases} x = f(u) \\ y = \varphi(u) \\ z = \psi(u). \end{cases}$$

Le (4.18) sono chiamate equazioni parametriche ordinarie della curva; se, in particolare, esse risultano lineari in u, allora la curva individuata è una retta.

Esistono poi anche le equazioni parametriche generalizzate di una curva; esse sono del tipo

$$\begin{cases} f(x, y, z; u) = 0 \\ \varphi(x, y, z; u) = 0 \\ \psi(x, y, z; u) = 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} f_1(x, y, z; u, v) = 0 \\ f_2(x, y, z; u, v) = 0 \\ f_3(x, y, z; u, v) = 0 \\ f_4(x, y, z; u, v) = 0 \,. \end{cases}$$

4.15 Piano tangente ad una superficie. Retta tangente ad una curva sghemba.

In un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ di una superficie S, l'equazione del piano tangente vale

$$(x - x_0)\frac{\partial f(P)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(P)}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial f(P)}{\partial z} = 0$$

se S è rappresentata da un'equazione del tipo (4.14), ovvero

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial \varphi(x_0, y_0)}{\partial y}$$

se S è espressa in forma esplicita, cioè con un'equazione del tipo (4.15). Se la superficie è invece individuata dalle equazioni parametriche (4.16), e $P(u_0, v_0)$ è il punto di tangenza, l'equazione del piano tangente è

$$\begin{vmatrix} x - f(P) & y - \varphi(P) & z - \psi(P) \\ \dfrac{\partial f(P)}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi(P)}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi(P)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f(P)}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi(P)}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi(P)}{\partial v} \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Data una curva $\mathscr{C}$ espressa dalle equazioni cartesiane (4.17), la retta tangente in un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ di $\mathscr{C}$ ha equazioni

$$\begin{cases} (x - x_0)\dfrac{\partial f(P)}{\partial x} + (y - y_0)\dfrac{\partial f(P)}{\partial y} + (z - z_0)\dfrac{\partial f(P)}{\partial z} = 0 \\ (x - x_0)\dfrac{\partial \varphi(P)}{\partial x} + (y - y_0)\dfrac{\partial \varphi(P)}{\partial y} + (z - z_0)\dfrac{\partial \varphi(P)}{\partial z} = 0; \end{cases}$$

se invece la curva è espressa nella forma parametrica (4.18), la tangente in

$P(u_0)$ vale

$$\frac{x - f(P)}{f'(P)} = \frac{y - \varphi(P)}{\varphi'(P)} = \frac{z - \psi(P)}{\psi'(P)}.$$

Esercizio 4.1.

Data la retta

$$\begin{cases} x + y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

ricavarne le equazioni ridotte.

Moltiplicando la prima equazione per -2 e sommando abbiamo

(4.1.1) $\qquad z = 1.$

Sostituendo, ad esempio nella prima equazione, si ha

(4.1.2) $\qquad x + y = 0.$

La (4.1.1) e la (4.1.2) individuano le equazioni ridotte della retta assegnata:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.2.

Trovare le equazioni ridotte della retta

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0\,. \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ottiene

$$3x + z + 1 = 0\,.$$

Moltiplicando la prima equazione per -2 e sommandola alla seconda si ha

$$3y - 5z + 4 = 0.$$

Abbiamo quindi il sistema di equazioni ridotte

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3}z - \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{5}{3}z - \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

E' opportuno notare che questo è un sistema di equazioni ridotte ma non solo il possibile. Infatti, anzichè considerare due piani paralleli all'asse y e all'asse x possiamo servirci di due piani paralleli all'asse z e all'asse x ed avere così il sistema

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{5}y - \dfrac{3}{5} \\ z = -\dfrac{3}{5}y - \dfrac{4}{5}, \end{cases}$$

oppure considerare due piani paralleli all'asse z e all'asse y ottenendo il sistema

$$\begin{cases} y = -5x - 3 \\ z = -3x - 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.3.

Determinare i coefficienti direttivi e i coseni direttori delle rette

a) $\dfrac{x}{2} = y - 1 = 2z + 1,$ b) $\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z - 2, \end{cases}$

r) $\begin{cases} 2x - y + z + 2 = 0 \\ x - 3y + 2z - 1 = 0, \end{cases}$ s) $\begin{cases} x = y + 3 \\ z = 1. \end{cases}$

a) Perchè la retta data abbia proprio l'espressione delle equazioni frazionarie, debbono essere uguali ad 1 i coefficienti delle incognite, quindi scriveremo

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}.$$

I coefficienti direttivi sono quindi proporzionali ai numeri 2, 1, 1/2, mentre i coseni direttori valgono:

$$\cos xa=\frac{4}{\pm\sqrt{21}},\quad \cos ya=\frac{2}{\pm\sqrt{21}},\quad \cos za=\frac{1}{\pm\sqrt{21}}.$$

b) Il sistema dato può scriversi sotto la forma

$$\begin{cases} z=\dfrac{x-1}{2} \\ z=-(y+2), \end{cases}$$

da cui si trae l'espressione delle equazioni frazionarie:

$$\frac{x-1}{2}=-\frac{y+2}{1}=z.$$

Quindi i coefficienti direttivi sono proporzionali ai numeri 2, −1, 1, mentre i coseni direttori valgono

$$\cos bx=\frac{2}{\pm\sqrt{6}},\quad \cos by=\frac{1}{\mp\sqrt{6}},\quad \cos bz=\frac{1}{\pm\sqrt{6}}.$$

r) Possiamo procedere nel modo seguente. Supponendo che la prima e la seconda equazione del sistema rappresentino i piani α e β di cui r è intersezione; consideriamo (fig. 4.3) le rette n_1 e n_2, normali ai piani e quindi anche a r. Com'è noto, la condizione di perpendicolarità di due rette è data da

$$a\,r_1+b\,r_2+c\,r_3=0$$

dove a, b e c sono i coefficienti direttivi della normale e r_1, r_2, r_3 i coefficienti direttivi di r. Essendo poi i coefficienti direttivi di ciascuna normale

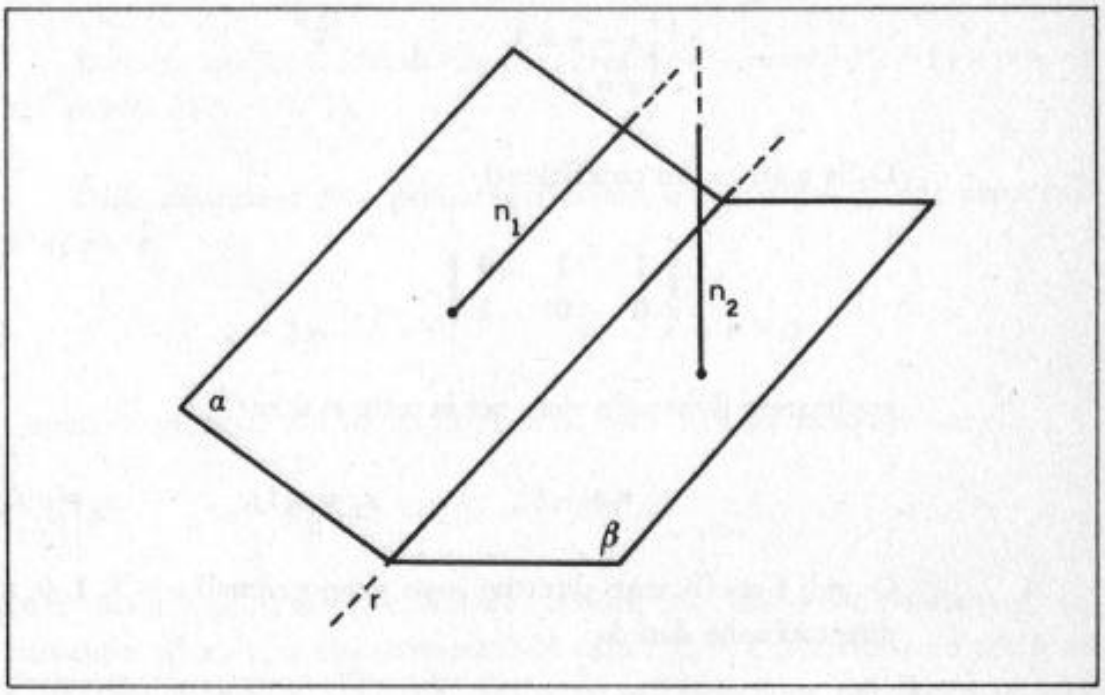

Figura 4.3

proporzionali ai coefficienti delle incognite nell'equazione del piano, si hanno le seguenti condizioni

$$\begin{cases} 2r_1 - r_2 + r_3 = 0 \\ r_1 - 3r_2 + 2r_3 = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ammette ∞^1 soluzioni date da

$$r_1 = \rho A_1, \qquad r_2 = -\rho A_2, \qquad r_3 = \rho A_3$$

dove A_1, A_2, A_3, sono i minori ottenuti dalla matrice dei coefficienti sopprimendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza colonna. Si ha quindi:

$$r_1 = \rho(1), \qquad r_2 = \rho(-3), \qquad r_3 = \rho(-5)\,.$$

I coefficienti direttivi sono pertanto proporzionali ai numeri -1, 3, 5. I coseni direttori sono invece

$$\cos rx = \frac{1}{\pm\sqrt{35}}, \qquad \cos ry = \frac{3}{\pm\sqrt{35}}, \qquad \cos rz = \frac{5}{\pm\sqrt{35}}\,.$$

Il sistema dato si può scrivere

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ z = 1. \end{cases}$$

Dalla matrice dei coefficienti

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

applicando il metodo visto per la retta r, si ha:

$$s_1 = \rho(-1), \qquad s_2 = \rho(1), \qquad s_3 = \rho(0).$$

Quindi i coefficienti direttivi sono proporzionali a $-1, 1, 0$, mentre i coseni direttori sono dati da

$$\cos sx = \frac{1}{\mp\sqrt{2}}, \quad \cos sy = \frac{1}{\pm\sqrt{2}}, \quad \cos sz = 0.$$

Esercizio 4.4.

Determinare l'equazione normale del piano $x + y + 2z - 3 = 0$ *e i coefficienti direttivi e i coseni direttori della normale* n *ad esso. Caratterizzare i segni prendendo come verso positivo su* n *quello che va da* O *verso il piano.*

Essendo $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{6}$ si ha che l'equazione normale del piano è

$$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}x \pm \frac{1}{\sqrt{6}}y \pm \frac{2}{\sqrt{6}}z \mp \frac{3}{\sqrt{6}} = 0.$$

Dato che l'espressione normale di un piano è del tipo

$$x \cos xn + y \cos yn + z \cos zn - p = 0,$$

tenendo conto del verso assegnato si ha

$$\cos xn = +\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos yn = +\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos zn = +\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Esercizio 4.5.

Determinare il piano passante per la retta r *di equazioni* $x = 2y + 1 = -z$ *e il punto* $A(2, -2, 1)$.

Dalle equazioni date possiamo ricavare le equazioni di due piani passanti per r:

$$x - 2y - 1 = 0, \qquad x + z = 0 .$$

Quindi l'equazione del fascio di piani di cui r è l'asse ha equazione

$$x - 2y - 1 + \lambda(x + z) = 0 . \tag{4.5.1}$$

Dato che di questo fascio dobbiamo trovare quel piano che contiene A, sostituendo ad x, y, z rispettivamente i valori $2, -2, 1$, otterremo per λ un particolare valore $(-5/3)$ che, sostituito nell'equazione del fascio (4.5.1), porgerà l'equazione del piano cercato:

$$2x + 6y + 5z - 3 = 0.$$

Esercizio 4.6.

Determinare il piano passante per la retta r *di equazioni* $x = 2y + 1 = -z$ *e parallelo alla retta* s *di equazioni* $x = 2y = 3z$.

Dobbiamo ancora servirci dell'equazione del fascio avente per asse r, cioè dell'equazione

$$x - 2y - 1 + \lambda (x + z) = 0$$

che possiamo anche scrivere

$$(1 + \lambda)x - 2y + \lambda z - 1 = 0. \tag{4.6.1}$$

Per soddisfare le condizioni richieste, la normale al piano cercato deve essere normale anche ad s. Dalla condizione di perpendicolarità di due rette, essendo i coefficienti direttivi della normale uguali ai coefficienti delle incognite nell'equazione del piano, si ha:

$$(1+\lambda)\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(-2)+\frac{1}{3}(\lambda)=0\,,$$

da cui si ricava $\lambda = 0$. Sostituendo questo valore nella (4.6.1) si ottiene l'equazione del piano cercato:

$$x-2y-1=0.$$

Esercizio 4.7.

Determinare l'equazione del piano contenente la retta r *di equazioni* $x = 2y + 1 = -z$ *e normale al piano* $x + y = 0$.

L'equazione del fascio di piani per r è, come già abbiamo visto, data da

$$(1+\lambda)\,x-2y+\lambda z-1=0.$$

Ricordando la condizione di perpendicolarità di due piani si ha

$$(1+\lambda)\cdot 0-2+\lambda=0,$$

da cui si trae $\lambda = 2$. Sostituendo questo valore nell'equazione del fascio si ottiene l'equazione del piano cercato:

$$3x-2y+2z-1=0\,.$$

Esercizio 4.8.

Determinare il piano passante per A(1, 0, 2) *e parallelo alla retta* r' *di equazioni* $x = y = z$ *e alla retta* r" *di equazioni*

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x-y+z-1=0. \end{cases}$$

Tutti i piani passanti per A costituiscono una stella di equazione

$$a(x-1)+by+c(z-2)=0,$$

ossia

$$ax + by + cz - a - 2c = 0\,. \tag{4.8.1}$$

Dobbiamo determinare a, b, e c in modo che siano soddisfatte le condizioni imposte dal problema. Se il piano è parallelo ad r' e ad r'' vuol dire che la normale ad esso dovrà riuscire perpendicolare tanto ad r' quanto ad r''. Quindi dovranno essere soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} al + bm + cn = 0 \\ al_0 + bm_0 + cn_0 = 0, \end{cases} \tag{4.8.2}$$

dove l, m ed n uguali rispettivamente a 1, 1, 1, sono i coefficienti direttivi di r', e l_0, m_0, n_0 sono i coefficienti direttivi di r''. Dato che la matrice dei coefficienti rappresentante quest'ultima retta è

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

si ottiene $l_0 = 3$, $m_0 = -1$, $n_0 = -4$. Quindi il sistema (4.8.2) diventa

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a - b - 4c = 0\,. \end{cases}$$

Le soluzioni diverse dalla ovvia di questo sistema sono proporzionali ai minori, presi a segni alterni $(+, -, +)$, estratti dalla matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{Vmatrix},$$

cioè si ha

$$a = \rho \cdot (-3), \qquad b = -\rho \cdot (-7), \qquad c = \rho \cdot (-4).$$

Sostituendo questi valori nella (4.8.1) ed eliminando ρ si ottiene l'equazione del piano cercato:

$$3x - 7y + 4z - 11 = 0.$$

Esercizio 4.9.

Determinare la distanza del punto A(1, 0, 2) *dalla retta* r *di equazioni*

$$\begin{cases} x = y - 2 \\ z = 3 \, . \end{cases}$$

Per valutare tale distanza dobbiamo considerare tra le ∞^1 rette passanti per A e normali ad r, quella incidente la retta medesima; tale retta è contenuta in un piano π passante per A e perpendicolare ad r. L'equazione della stella di piani di centro A è

$$a(x-1) + by + c(z-2) = 0 \, . \tag{4.9.1}$$

?

Imponendo la condizione di perpendicolarità tra la retta r e il piano π si ha

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n} \, ,$$

dove l, m ed n si traggono dalla matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

nel modo noto e valgono 1, 1, 0. Le condizioni di perpendicolarità sopraindicata diventa quindi

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{0}$$

ossia, con un artificio ormai noto,

$$\begin{cases} c = 0 \\ a = b \, . \end{cases}$$

Ponendo $a = b = 1$ si ha, sostituendo in (4.9.1), l'equazione del piano π:

$$x - 1 + y = 0 \, .$$

Pertanto, dal sistema

$$\begin{cases} x = y - 2 \\ z = 3 \\ x + y - 1 = 0, \end{cases}$$

si ottengono le coordinate di H, punto d'incontro della retta r con la normale p. Risulta $H(-1/2, 3/2, 3)$, quindi è

$$\overline{AH} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (2-3)^2} = \frac{\sqrt{22}}{2}.$$

Esercizio 4.10.

Determinare per A(3, − 1, 2) *la parallela alla retta* r *di equazioni*

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 . \end{cases}$$

I coefficienti direttivi della retta r si ricavano, come sappiamo, dalla matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

e valgono 1, 1, 0. Se l', m', n' sono i coefficienti direttivi della retta s, retta parallela ad r e passante per A, per la condizione di parallelismo si ha

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'},$$

cioè

$$\frac{1}{l'} = \frac{1}{m'} = \frac{0}{n'},$$

da cui

$$\begin{cases} n' = 0 \\ l' = m' . \end{cases}$$

Dall'espressione generica delle equazioni frazionarie, ponendo $m' = 1$ e quindi $l' = 1$ si hanno le equazioni della retta s cercata:

$$\begin{cases} x-3=y+1 \\ z-2=0\,, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x-y+4=0 \\ z-2=0\,. \end{cases}$$

Esercizio 4.11.

Date le rette

$$\text{r)} \quad \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ 2x-y+z-1=0, \end{cases} \qquad \text{r')} \quad \begin{cases} x=y-1 \\ z=1\,, \end{cases}$$

verificare se sono complanari e, in tale ipotesi, determinare l'equazione del piano che le contiene e il loro punto di intersezione.

Se r ed r' sono complanari vuol dire che i quattro piani appartengono ad una stessa stella. Se ciò è vero deve verificarsi la relazione

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = 0,$$

cioè deve essere nullo il determinante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Si ha infatti

$$A = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

quindi r ed r' sono complanari.

Determiniamo ora il punto comune alle due rette coincidenti con il punto comune ai quattro piani che le determinano. Abbiamo

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \\ x = y - 1 \\ z = 1 \,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova che il punto P di intersezione ha le coordinate $(1, 2, 1)$.

Determiniamo ora l'equazione del piano contenente r ed r'. Evidentemente tale piano sarà l'unico piano comune tanto al fascio di asse r quanto al fascio di asse r'. Sommando, nel sistema che individua r', il primo membro della prima equazione con il valore doppio del primo membro della seconda si ha

$$x - y + 2z - 1 = 0 \tag{4.11.1}$$

che figura anche nel sistema che individua la retta r; quindi il piano di equazione (4.11.1) è il piano cercato.

Esercizio 4.12.

Data la retta r *di equazioni*

RIFARE

$$\begin{cases} z = 2x + 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

e il punto P(2, 1, 2), *trovare l'equazione della retta* n *uscente da* P, *ortogonale ed incidente* r.

Si tratta anzitutto di trovare il piano π contenente P e normale ad r.

La stella di piani di centro P ha equazione

$$a(x - 2) + b(y - 1) + c(z - 2) = 0. \tag{4.12.1}$$

I coefficienti direttivi di r si ottengono dalla matrice

$$\begin{Vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

e valgono 1, 0, 2. Per la condizione di perpendicolarità tra il piano π e la retta r di cui si è detto, deve essere

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{0} = \frac{c}{2},$$

da cui segue

$$b = 0, \qquad a = 1, \qquad c = 2.$$

Dalla (4.12.1) abbiamo quindi l'equazione del piano π:

$$x + 2z - 6 = 0 .$$

Per trovare le coordinate del punto H, punto intersezione di r con π, dobbiamo pertanto considerare il sistema

$$\begin{cases} z + 2x + 1 \\ y = 1 \\ x + 2z - 6 = 0 . \end{cases}$$

Risolvendo si ha $H(4/5, 1, 13/5)$. La retta n in questione coincide con la retta congiungente H con P, quindi ha equazione

$$\frac{x-2}{\frac{4}{5}-2} = \frac{y-1}{1-1} = \frac{z-2}{\frac{13}{5}-2},$$

ossia

$$\begin{cases} x + 2z - 6 = 0 \\ y - 1 = 0 . \end{cases}$$

Esercizio 4.13.

Date le rette sghembe

$$\text{a)} \quad \begin{cases} z - 2x = 0 \\ y + 4 = 0 , \end{cases} \qquad \text{b)} \quad y = z = 4 + x ,$$

determinare l'equazione della retta perpendicolare tanto ad a *quanto a* b *ed incidente le rette medesime.*

Prendiamo su a un generico punto P. Tenendo conto che per tale retta valgono le relazioni $z = 2x$, $y = -4$, possiamo indicare le coordinate di P per mezzo di un solo parametro, cioè possiamo scrivere $P(\alpha, -4, 2\alpha)$, dopo aver posto $x = \alpha$. Analogamente, preso un punto Q generico su b, potremo usare la notazione: $Q(\beta, \beta + 4, \beta + 4)$. La retta PQ viene quindi ad avere le equazioni

$$(4.13.1) \qquad \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{y + 4}{\beta + 4 + 4} = \frac{z - 2\alpha}{\beta + 4 - 2\alpha} .$$

Dato che i coefficienti direttivi, ricavati con il consueto procedimento, valgono, per la retta a: 1, 0, 2 e per la retta b: 1, 1, 1, possiamo imporre la duplice condizione di perpendicolarità

$$\begin{cases} (\beta - \alpha) + (\beta + 8) \cdot 0 + (\beta - 2\alpha + 4) \cdot 2 = 0 \\ (\beta - \alpha) + (\beta + 8) + (\beta - 2\alpha + 4) = 0 . \end{cases}$$

OK

Dal sistema così formato, risolvendo, si trae

$$\alpha = -2, \qquad \beta = -6.$$

Sostituendo tali valori nella (4.13.1) si ottiene l'equazione della retta cercata:

$$\frac{x + 2}{-2} = y + 4 = z + 4 .$$

Esercizio 4.14.

RIFARE

Trovare la minima distanza fra le rette

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + 2 = 0 , \end{cases} \qquad \text{b)} \quad x = y = 2.$$

Possiamo seguire questo procedimento: trovata l'equazione del piano

α passante per a e parallelo a b (fig. 4.4), determiniamo la distanza da α di un generico punto P di b: questa distanza è la minima distanza tra le due rette.

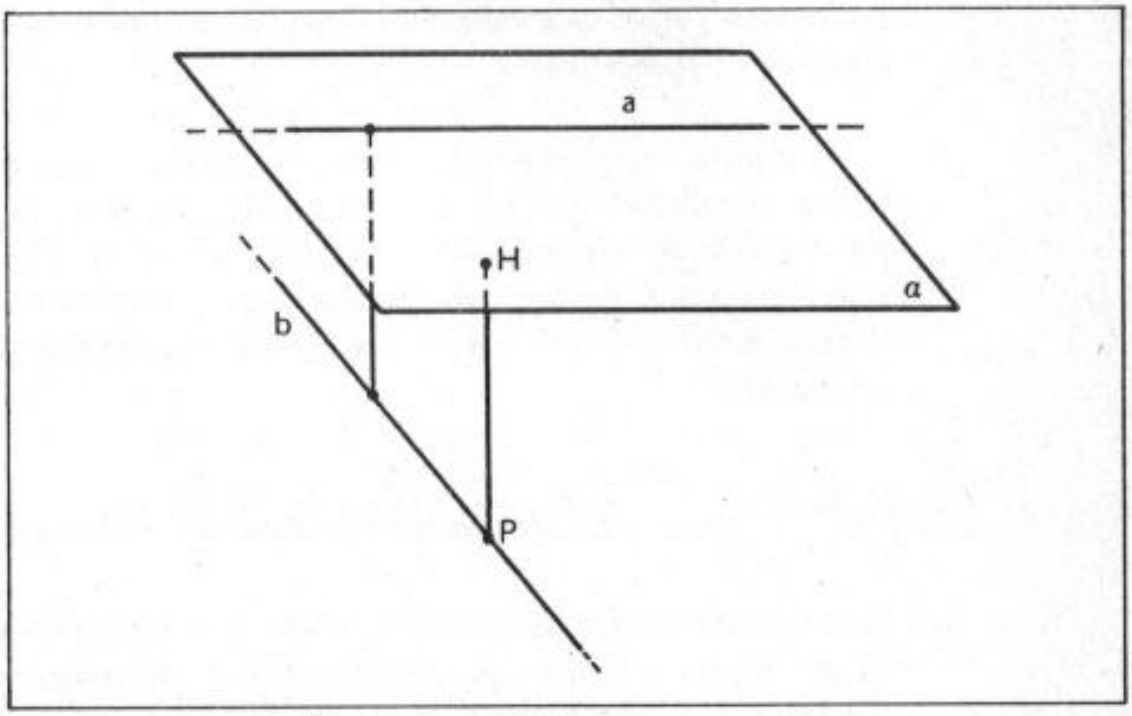

Figura 4.4

L'equazione del fascio di asse a è

$$x - 2z + \lambda(y + 2) = 0, \tag{4.14.1}$$

ossia

$$x + \lambda y - 2z + 2\lambda = 0.$$

Se α deve essere parallelo a b dovrà essere $al + bm + cn = 0$, cioè, essendo, per la retta b, $l : m : n = 0 : 0 : 1$, dovrà essere

$$1 \cdot 0 + \lambda \cdot 0 - 2 = 0.$$

Si vede che tale espressione non è soddisfatta da alcun valore finito di λ; possiamo quindi pensare $\lambda = \infty$, ricordando che λ esprime un rapporto di due parametri. Dalla (4.14.1) abbiamo quindi che l'equazione del piano α e

$$y + 2 = 0 .$$

Per trovare la minima distanza richiesta prendiamo un punto qualsiasi su b, ad esempio, $P(2, 2, 0)$. Abbiamo

$$\overline{PH} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{2+2}{\pm\sqrt{1}} \right| = 4.$$

Esercizio 4.15.

Si determini la retta dello spazio passante per A(0, 0, 1), *parallela al piano* α *di equazione* $z + 2y - 2x = 0$ *e che si appoggia (cioè è incidente) alla retta* r *di equazioni*

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ z = 2x\,. \end{cases}$$

Consideriamo il piano β individuato da A e da r, poi costruiamo il piano α' passante per A e parallelo ad α. L'intersezione di α' e di β individua la retta cercata.

L'equazione del fascio di asse r è

$$y - x + 1 + \lambda(z - 2x) = 0\,. \tag{4.15.1}$$

Imponendo il passaggio per A si ricava $\lambda = -1$. Sostituendo questo valore nella (4.15.1) si ha l'equazione del piano β:

$$x + y - z + 1 = 0.$$

Determiniamo ora l'equazione del piano α'. La stella di piani di centro A ha equazione

$$ax + by + c(z - 1) = 0. \tag{4.15.2}$$

Per la condizione di parallelismo di due piani si ha

$$\frac{a}{-2} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1}\,.$$

Quindi, ponendo nella (4.15.2) $a = -2$, $b = 2$, $c = 1$, si ottiene appunto l'equazione di α':

$$2x - 2y - z + 1 = 0.$$

La retta cercata è pertanto individuata dalle equazioni

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - 2y - z + 1 = 0 \,. \end{cases}$$

Esercizio 4.16.

Scrivere le equazioni dei piani passanti per il punto P(2, 2, 0) *aventi dall'origine una distanza uguale ad* 1/6 *e paralleli alla retta* r *di equazioni*

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 4. \end{cases}$$

Possiamo procedere nel modo seguente (fig. 4.5): considerata la sfera di centro O e raggio 1/6 si può osservare che ogni piano ad essa tangente risulta distante 1/6 da O; mandando per r_1, retta per P parallela ad r, i piani tangenti alla sfera, si ottengono i piani cercati.

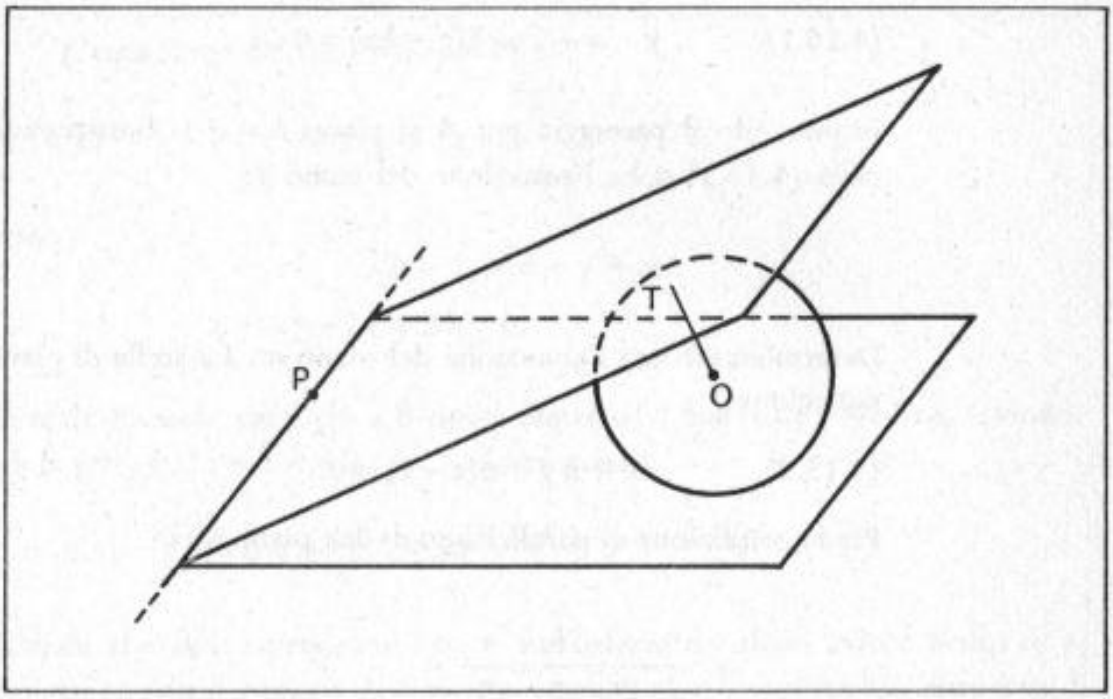

Figura 4.5

Troviamo intanto r_1. Si ha

$$\frac{x-2}{l_0} = \frac{y-2}{m_0} = \frac{z}{n_0} \,. \tag{4.16.1}$$

Per la condizione di parallelismo tra r ed r_1 e

$$\frac{l_0}{1} = \frac{m_0}{-1} = \frac{n_0}{0} \quad ,$$

dove 1, − 1, 0 sono rispettivamente proporzionali ai coefficienti direttivi l, m ed n di r. Quindi la retta r_1, in base alla (4.16.1), è individuata dalle equazioni

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + y - 4 = 0. \end{cases}$$

Consideriamo ora il fascio di piani avente per asse r_1; esso ha per equazione

$$x + y - 4 + \lambda z = 0.$$

Tra questo fascio noi dobbiamo scegliere quei piani che distano dall'origine 1/6; deve quindi essere

$$\overline{OT} = \left| \frac{-4}{\pm\sqrt{1 + 1 + \lambda^2}} \right| = \frac{1}{6} ,$$

da cui si trae $\lambda = \pm\sqrt{574}$. Pertanto i piani che godono delle proprietà richieste sono due ed hanno le equazioni

$$x + y + \sqrt{574}\ z - 4 = 0 ,$$
$$x + y - \sqrt{574}\ z - 4 = 0 .$$

Esercizio 4.17.

Trovare i piani paralleli alla retta r *di equazioni*

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

e perpendicolari al piano α *di equazione* $2x + z = 0$ *e distanti* 1 *dal punto* P(0, 0, 2).

Consideriamo l'equazione generica di un piano

(4.17.1) $\qquad ax + by + cz + d = 0 .$

Dato che i coefficienti direttivi della r valgono rispettivamente 2, 1, 0, per la condizione di parallelismo con la retta r si ha

$$2a + b = 0.$$

Per la condizione di perpendicolarità al piano α deve poi valere la relazione

$$2a + c = 0.$$

Infine, dato che i piani debbono essere tutti distanti 1 da P, abbiamo

$$\frac{2c + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1 .$$

Possiamo quindi comporre il sistema

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 2a + c = 0 \\ 4c^2 + 4cd + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 . \end{cases}$$

Risolvendo, si ottengono le soluzioni

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = -2a \\ d = 7a \quad , \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = -2a \\ d = a \ . \end{cases}$$

Quindi i piani soddisfacenti le condizioni imposte sono due ed hanno le equazioni

$$x - 2y - 2z + 7 = 0, \qquad x - 2y - 2z + 1 = 0 .$$

Esercizio 4.18.

Data la curva dello spazio avente le equazioni parametriche

$$(4.18.1) \qquad \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - 1 \\ z = t^4 - 1 \, , \end{cases}$$

1) *scrivere le coordinate di un punto che stia sulla curva;*
2) *trovare un punto che non stia sulla curva;*
3) *verificare se il punto* P(3, 1, − 1) *sta sulla curva.*

1) Basta dare a t un valore qualsiasi appartenente all'insieme di definizione; per esempio, ponendo $t = 0$ si ha

$$Q(0, -1, 1).$$

2) Se poniamo, ad esempio, $x = 0$, dalla prima equazione abbiamo $t = 0$. Dando nelle altre equazioni a t valori diversi da 0 otterremo un punto che non sta sulla curva in quanto il sistema (4.18.1) non è soddisfatto da uno stesso valore del parametro t. Per esempio, il punto $T(0, 0, 0)$ certamente non sta sulla curva.

3) Sostituendo si ha

$$\begin{cases} 3 = t^2 \\ 1 = t - 1 \\ -1 = t^4 - 1 \, . \end{cases}$$

Osservando che la terza equazione è soddisfatta solo per $t = 0$, valore che non soddisfa la prima e la seconda equazione, possiamo dire che non esiste un valore di t tale da soddisfare il sistema. Quindi il punto P non sta sulla curva.

Esercizio 4.19.

Verificare se la curva

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 \\ z = 2t^3 - t^2 \end{cases}$$

è piana.

Il problema consiste nel vedere se esiste un piano del tipo $ax + by + cz + d = 0$ contenente tutti i punti della curva. Se così è dovrà essere

$$a(t^2 + 1) + bt^3 + c(2t^3 - t^2) + d \equiv 0 ,$$

ovvero

$$(2c + b)\, t^3 + (a - c)\, t^2 + a + d \equiv 0.$$

Questa relazione impone che sia

$$\begin{cases} 2c + b = 0 \\ a - c = 0 \\ a + d = 0, \end{cases}$$

da cui si trae, risolvendo,

$$b = -2a, \qquad c = a, \qquad d = -a .$$

Sostituendo questi valori nell'equazione generica del piano e dividendo per a si ottiene

$$x - 2y + z - 1 = 0.$$

Questa è l'equazione del piano contenente la curva.

Esercizio 4.20.

Verificare se la curva dello spazio

$$\begin{cases} x = t^3 - 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = t^2 + 1 \end{cases}$$

è piana.

Procedendo in modo analogo all'esercizio precedente si ha

$$a(t^3 - 1) + b(3t - 2) + c(t^2 + 1) + d \equiv 0,$$

ossia

$$at^3 + ct^2 + 3bt - a - 2b + c + d \equiv 0 .$$

Possiamo quindi comporre il sistema

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ 3b = 0 \\ -a - 2b + c + d = 0, \end{cases}$$

da cui si trae evidentemente

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 . \end{cases}$$

Dobbiamo quindi concludere che in questo caso non esiste un piano contenente la curva cioè la curva considerata non è piana.

Esercizio 4.21.

Determinare per quali valori di λ la curva

$$\begin{cases} x = \dfrac{\lambda t^2 + t + \lambda - 1}{t^2 + (\lambda - 1)t - \lambda} \\[2ex] y = \dfrac{2t^3 - 2t^2 + t - 1}{t^3 + (\lambda - 1)t^2 - \lambda t} \\[2ex] z = \dfrac{t^3 - t^2 + t + 3}{t^3 + (\lambda - 1)t^2 - \lambda t} \end{cases}$$

risulta piana.

Procedendo come nei due esercizi precedenti si ha

$$(\lambda a + 2b + c + d)t^3 + (a + 2b - c + \lambda d - d)t^2 +$$
$$+ (\lambda a - a + b + c - \lambda d)t + b + 3c \equiv 0\,,$$

che impone

$$\begin{cases} \lambda a + 2b + c + d = 0 \\ a + 2b - c + \lambda d - d = 0 \\ \lambda a - a + b + c - \lambda d = 0 \\ b + 3c = 0\,. \end{cases}$$

Affinchè questo sistema ammetta soluzioni diverse dalla ovvia, deve essere nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sviluppando il determinante ed uguagliando a zero lo sviluppo ottenuto si ottengono le soluzioni:

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -\dfrac{7}{2}\,, \end{cases}$$

che rappresentano i valori per i quali la curva assegnata è piana. Per $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -7/2$ la curva è sghemba.

Esercizio 4.22.

Data la curva

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$$

rappresentante la direttrice di un cono di vertice V(0, 0, 0), *trovare l'equazione del cono.*

Vediamo se la curva è piana. Abbiamo

$$a(2t) + b(t^2 + 1) + c(t + 2) + d \equiv 0 ,$$

ossia

$$bt^2 + (2a + c)t + b + 2c + d \equiv 0.$$

Possiamo quindi comporre il sistema

$$\begin{cases} b = 0 \\ 2a + c = 0 \\ b + 2c + d = 0, \end{cases}$$

da cui, risolvendo, si trae

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = -2a \\ d = 4a . \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nell'equazione generica di un piano e dividendo per a si ottiene

$$x - 2z + 4 = 0,$$

equazione che rappresenta il piano contenente la curva; quindi la curva data è piana.

Indicato con $P(2t, t^2 + 1, t + 2)$ un punto generico della curva, si ha che la retta generica PV ha equazione

$$\frac{x}{2t} = \frac{y}{t^2 + 1} = \frac{z}{t + 2}$$

cioè ad esempio,

$$(4.22.1) \qquad \begin{cases} (t^2+1)x-2ty=0 \\ (t+2)x-2tz=0. \end{cases}$$

Le (4.22.1) rappresentano le equazioni parametriche generalizzate del cono. Per ottenere l'equazione cartesiana basta eliminare t: dalla seconda equazione si ha

$$t=-\frac{2x}{x-2z},$$

e, sostituendo nella prima equazione,

$$\left(\frac{4x^2}{(x-2z)^2}+1\right)x+\frac{4xy}{(x-2z)}=0,$$

ossia

$$[4x^2+(x-2z)^2]x+4xy(x-2z)=0.$$

Esercizio 4.23.

Trovare l'equazione cartesiana del cilindro che ha per direttrice la curva di equazioni

$$\begin{cases} y^2+z^2-2y-2z+1=0 \\ y=x \end{cases}$$

e le generatrici parallele alla retta r *di equazioni* $x=2y=z$.

Se $P(\alpha, \beta, \gamma)$ è un punto generico della curva, essendo i coefficienti direttivi di r rispettivamente 2, 1, 2, in base alla condizione di parallelismo, l'equazione di una generica generatrice è

$$\frac{x-\alpha}{2}=\frac{y-\beta}{1}=\frac{z-\gamma}{2},$$

ossia

$$x-\alpha=2(y-\beta)=z-\gamma.$$

Possiamo quindi considerare il sistema

$$\begin{cases} \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta - 2\gamma + 1 = 0 \\ \alpha = \beta \\ x - \alpha = 2(y - \beta) = z - \gamma \end{cases}$$

che ci dà le equazioni parametriche generalizzate dal cilindro. Per trovare l'equazione cartesiana basta eliminare i parametri; si ottiene

$$(2y - x)^2 + (z - 2x + 2y)^2 - 2(2y - x) - \\ - 2(z - 2x + 2y) + 1 = 0.$$

Esercizio 4.24.

E' data la curva

$$\begin{cases} x = t^2 - 5 \\ y = 2t + 2 \\ z = t^2 \end{cases}.$$

1) *Trovare l'equazione del cilindro formato dalle rette passanti per la curva e parallele alla retta* r *di equazioni*

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

2) *Trovare le generatrici che incontrano l'asse* z *e, per quella più prossima al piano* $z = 0$, *determinare la distanza dall'origine.*

1) Consideriamo un punto generico della curva:

$$P(t^2 - 5, 2t + 2, t^2).$$

Essendo 1, 2, 0, i coefficienti direttivi di r, una generatrice generica avrà per equazioni

$$\frac{x - t^2 + 5}{1} = \frac{y - 2t - 2}{2} = \frac{z - t^2}{0},$$

ossia

$$(4.24.1) \qquad \begin{cases} z - t^2 = 0 \\ 2x - y - 2t^2 + 2t + 12 = 0. \end{cases}$$

Le (4.24.1) rappresentano le equazioni parametriche generalizzate del cilindro; eliminando t si ottiene la sua equazione cartesiana:

$$4z = (y + 2z - 2x - 12)^2 .$$

2) L'insieme di tutte le generatrici è indicato dal sistema (4.24.1); volendo individuare le generatrici incidenti l'asse z dovremo aggiungere altre condizioni, ossia

$$\begin{cases} z - t^2 = 0 \\ 2x - y - 2t^2 + 2t + 12 = 0. \\ x = 0 \\ y = 0 . \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si trae

$$2t^2 - 2t - 12 = 0$$

che porge le soluzioni $t_1 = -2$, $t_2 = 3$. Sostituendo questi valori di t nel sistema (4.24.1) si hanno le equazioni delle generatrici g_1 e g_2 che incontrano l'asse z:

$$g_1) \quad \begin{cases} z = 9 \\ 2x - y = 0, \end{cases} \qquad g_2) \quad \begin{cases} z = 4 \\ 2x - y = 0. \end{cases}$$

Di queste si vede che la più vicina ad O è g_2: la sua distanza dall'origine, infatti, come è indicato nello stesso sistema, vale 4.

Esercizio 4.25.

Data la curva

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 \\ z = 2t^3 - t^2 , \end{cases}$$

1) *verificare se la curva giace su di un piano;*
2) *trovare le equazioni cartesiane della curva.*

1) Possiamo procedere in un modo più rapido di quello seguito negli esercizi 4.19 e 4.21. Infatti, osservando che dalla prima equazione abbiamo

$$t^2 = x - 1 \tag{4.25.1}$$

e tenendo conto della seconda equazione, possiamo scrivere la terza nel modo seguente:

$$z = 2y - x + 1 \,. \tag{4.25.2}$$

La (4.25.2) è l'equazione del piano contenente la curva, quindi la curva considerata è piana.

2) Tenendo conto anche della (4.25.1) la seconda equazione si può scrivere

$$y = t(x-1) \,,$$

da cui

$$t = \frac{y}{x-1} \,.$$

Sostituendo questo valore nella (4.25.1) si ha

$$y^2 = (x-1)^3 \,. \tag{4.25.3}$$

Nella terza equazione abbiamo

$$z = t(2t^2 - 1) = t(2x - 2 - 1) = t(2x - 3),$$

da cui

$$t = \frac{z}{2x-3} \,.$$

Sostituendo tale valore nella (4.25.1) si ha

$$z^2 = (x-1)(2x-3)^2 \,. \tag{4.25.4}$$

Componendo il sistema formato dalle equazioni (4.25.3) e (4.25.4) si hanno le equazioni cartesiane della curva.

Esercizio 4.26.

Dato il sistema di equazioni

$$(4.26.1)\qquad \begin{cases} x = 2u + 3uv \\ y = 3u^2 + 4v \\ z = 5u - v^2 , \end{cases}$$

1) *verificare se il sistema* (4.26.1) *rappresenta una superficie, e, nel caso si tratti di una superficie:*

2) *determinare un punto giacente su di essa;*

3) *determinare un punto non giacente su di essa;*

4) *scrivere le equazioni di una curva che stia su di essa.*

1) Il sistema (4.26.1) rappresenta effettivamente una superficie solo se le funzioni nei due parametri u e v sono indipendenti (se non lo fossero si tratterebbe dell'equazione di una curva). A tale scopo deve essere verificata, come noto, la condizione

$$car \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial v} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \end{Vmatrix} = 2 .$$

Nel nostro caso risulta appunto

$$car \begin{Vmatrix} 2+3v & 6u & 5 \\ 3u & 4 & -2v \end{Vmatrix} = 2$$

in quanto nessuno dei minori della matrice è identicamente nullo; quindi il sistema (4.26.1) rappresenta effettivamente una superficie.

2) Basta dare due valori arbitrari ad u e v; ad esempio ponendo $u = 0$, $v = 0$ si ha

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

quindi $P(0, 0, 0)$ è un punto che sta sulla superficie.

3) Poniamo, ad esempio, $v = 0$; il sistema (4.26.1) diventa

$$\begin{cases} x = 2u \\ y = 3u^2 \\ z = 5u . \end{cases}$$

Osservando che, ad esempio, per $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, tale sistema non ammette soluzione, possiamo concludere che il punto $Q(0, 0, 1)$ non sta sulla superficie.

4) Basta prendere uno dei due parametri e farlo diventare funzione dell'altro. Ad esempio, ponendo $u = v$ si ha

$$\begin{cases} x = 2u + 3u^2 \\ y = 3u^2 + 4u \\ z = 5u - u^2 . \end{cases}$$

Esercizio 4.27.

Trovare il centro e il raggio delle seguenti sfere:

$$\text{a)} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 7 = 0,$$
$$\text{b)} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 6 = 0.$$

a) Si ha

$$C(1, 1, -2), \qquad r = i,$$

quindi si tratta di una sfera esistente solo nel campo immaginario.

b) Si ha

$$C(1, 1, -2), \qquad r = 0,$$

quindi la sfera in questione è a raggio nullo.

Esercizio 4.28.

Data la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2z = 0$ *e il piano* π *di equazione* $x + y + 1 = 0$, *trovare il raggio della circonferenza individuata dall'intersezione del piano con la sfera e il suo centro.*

Preliminarmente è bene vedere se la sfera è reale e se è reale anche la circonferenza intersezione. Per la sfera abbiamo $r = \sqrt{17}$ e $C(4, 0, -1)$. La circonferenza intersezione sarà reale se la distanza del piano π da C è minore di r; indicando con HC tale distanza abbiamo

$$HC = \left| \frac{4+1}{\pm\sqrt{2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}} .$$

Essendo $HC < r$ anche la circonferenza intersezione è reale. Per trovare il raggio di tale circonferenza possiamo procedere nel modo seguente (fig. 4.6).

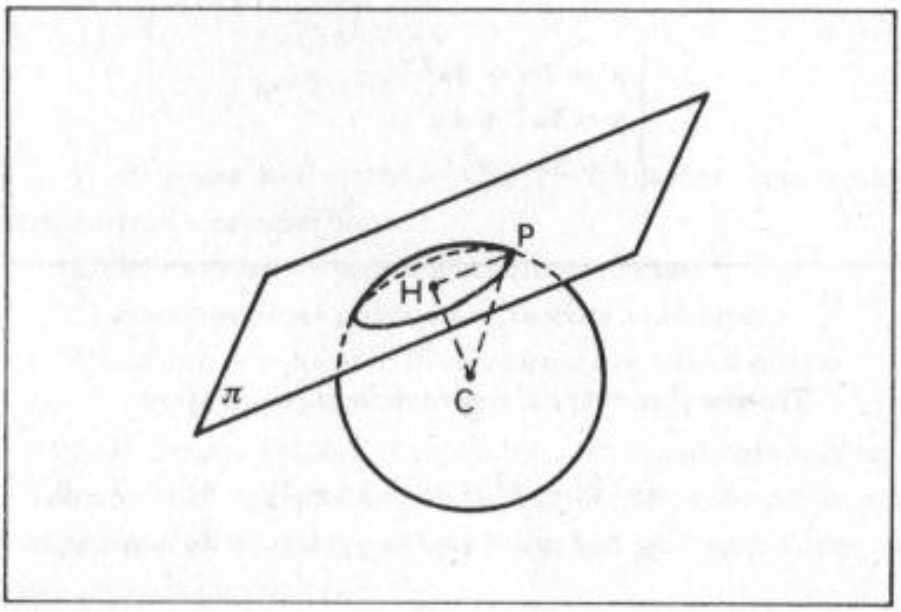

Figura 4.6

Preso un punto P generico sulla circonferenza, si ha la relazione

$$PC^2 - HC^2 = HP^2 .$$

Essendo PC ed HC noti, risulta quindi

$$HP = \frac{3}{\sqrt{2}} .$$

Le coordinate di H si ottengono considerando l'intersezione di π con la retta per C normale a π. La retta generica per C ha equazioni

$$\frac{x-4}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z+1}{n} ;$$

ma per la condizione di perpendicolarità a π si ha $l : m : n = 1 : 1 : 0$, pertanto la retta passante per CH ha le equazioni

$$\begin{cases} z+1=0 \\ x-y-4=0 . \end{cases}$$

Risolvendo quindi il sistema

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ z+1=0 \\ x-y-4=0 \end{cases}$$

si ottengono le coordinate di H; risulta: $H(3/2, -5/2, -1)$.

Si poteva però procedere anche in altro modo, considerare cioè la seguente combinazione lineare

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2z + \lambda(x + y + 1) = 0 ,$$

ovvero

$$x^2 + y^2 + z^2 + (\lambda - 8)x + \lambda y + 2z + \lambda = 0. \tag{4.28.1}$$

Per ogni valore di λ questa equazione rappresenta una sfera avente come cerchio massimo la circonferenza intersezione. Il centro generico della (4.28.1) è

$$C'\left(\frac{8-\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, -1\right). \tag{4.28.2}$$

Imponiamo che C' stia sul piano π in cui giace la circonferenza, cioè imponiamo che sia

$$\frac{8-\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + 1 = 0 .$$

Da tale espressione si ottiene $\lambda = 5$; costituendo tale valore nella (4.28.2) si hanno le coordinate del centro della circonferenza richiesta. Risulta: $C' \equiv H(3/2, -5/2, -1)$. Tenendo poi conto del fatto che la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y + 2z + 5 = 0$, ottenuta dalla (4.28.1) sostituendo a λ il valore 5, ha raggio uguale a quello della circonferenza intersezione si ha immediatamente che è $r = 3/\sqrt{2}$.

Esercizio 4.29.

Determinare l'equazione della sfera passante per i punti P(1, 0, 0), R(0, 0, 1) *e tangente in* Q(2/3, − 2/3, 1/3) *alla retta* s *di equazione* x/2 = − y/2 = z.

Facendo riferimento alla generica equazione della sfera:

(4.29.1) $$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0,$$

abbiamo anzitutto che le condizioni di passaggio per P, R e Q impongono rispettivamente, che sia

(4.29.2) $$1 + a + d = 0\,,$$

(4.29.3) $$1 + c + d = 0\,,$$

(4.29.4) $$\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c + d + 1 = 0\,.$$

La condizione di tangenza in Q alla retta s equivale, poi, ad imporre che il piano π, passante per Q e normale ad s (fig. 4.7), contenga il centro C della sfera. L'equazione del piano π è

$$2\left(x - \frac{2}{3}\right) - 2\left(y + \frac{2}{3}\right) + \left(z - \frac{1}{3}\right) = 0\,,$$

quindi, dovendo $C(-a/2, -b/2, -c/2)$ appartenere a π, possiamo scrivere

(4.29.5) $$2\left(-\frac{a}{2} - \frac{2}{3}\right) - 2\left(-\frac{b}{2} + \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{c}{2} - \frac{1}{3}\right) = 0\,.$$

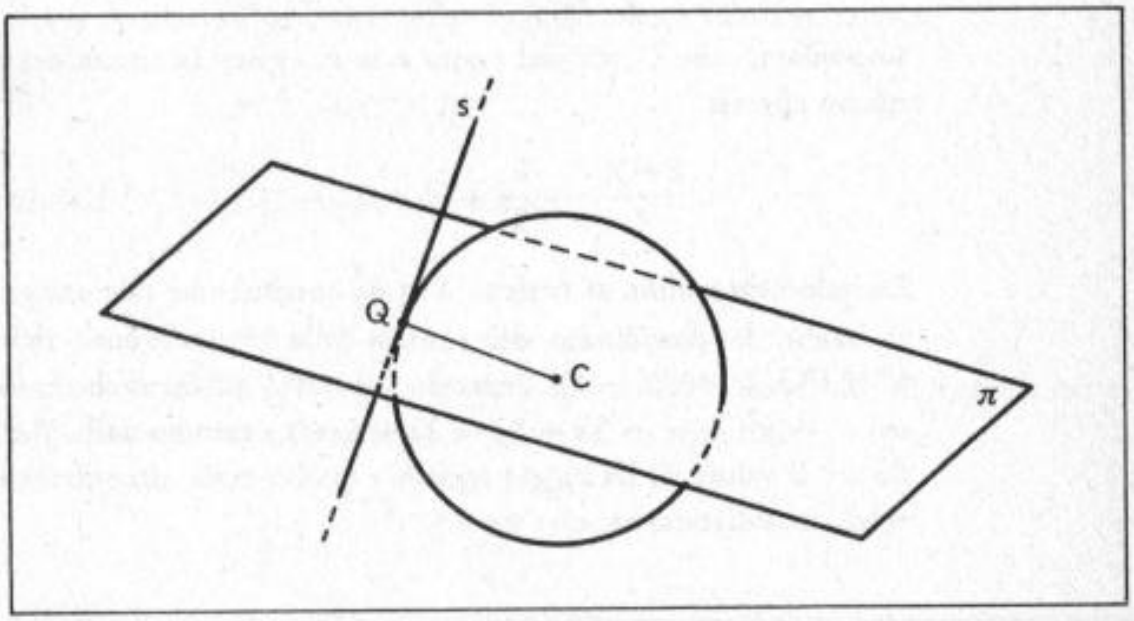

Figura 4.7

Risolvendo il sistema formato dalle quattro equazioni (4.29.2), (4.29.3), (4.29.4), (4.29.5) nelle quattro incognite a, b, c, d e sostituendo nella (4.29.1) i valori ottenuti come soluzione, si determina l'equazione della sfera in questione. Risulta

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0\,.$$

Esercizio 4.30.

Calcolare l'equazione della sfera passante per Q(1, 1, 1) *e tangente in* P(0, 0, 3) *al piano* π *di equazione* $x + y + 2z + 6 = 0$.

Considerando la generica equazione della sfera espressa dalla (4.29.1) abbiamo, anzitutto per le condizioni di passaggio per P e Q,

$$a + b + c + d + 3 = 0 \,, \tag{4.30.1}$$
$$3c + d + 9 = 0 \,. \tag{4.30.2}$$

La condizione di tangenza in P al piano π equivale, poi, ad imporre che la retta r, passante per P e normale a π (fig. 4.8) contenga il centro della sfera. Le equazioni della retta r sono

$$x = y = \frac{z-3}{2} \,,$$

quindi, dovendo $C(-a/2, -b/2, -c/2)$ appartenere ad r, possiamo scrivere

$$-\frac{a}{2} = -\frac{b}{2} = \frac{(-c/2) - 3}{2} \,,$$

ossia

$$a = b = \frac{c}{2} + 3 \,,$$

che si può, ad esempio, comporre nelle due equazioni

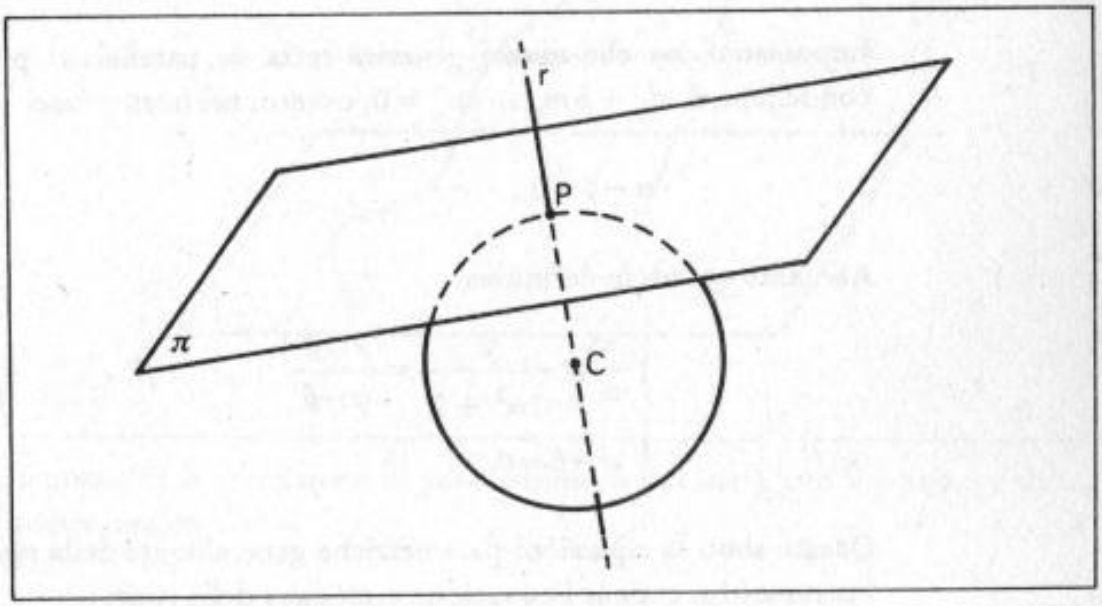

Figura 4.8

(4.30.3) $\quad a = b\,,$

(4.30.4) $\quad a = \dfrac{c}{2} + 3.$

Risolvendo il sistema formato dalle quattro equazioni (4.30.1), (4.30.2), (4.30.3), (4.30.4) nelle quattro incognite a, b, c, d si determina l'equazione della sfera in questione. Risulta

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y - 9 = 0\,.$$

Esercizio 4.31.

Trovare l'equazione cartesiana della superficie rigata luogo delle rette che si appoggiano alle curve

$$\mathscr{C}_1)\begin{cases} y = 2x^2 + 2 \\ z = x\,, \end{cases} \qquad \mathscr{C}_2)\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

e sono parallele al piano $z = 0$.

Consideriamo un punto generico su $\mathscr{C}_1$, $P(\alpha, 2\alpha^2 + 2, \alpha)$, e un punto generico su $\mathscr{C}_2$, $Q(0, 0, \beta)$. La retta generica passante per essi è

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{2\alpha^2 + 2} = \frac{z - \beta}{\alpha - \beta}.$$

Imponiamo ora che questa generica retta sia parallela al piano $z = 0$. Tale condizione è $al_0 + bm_0 + cn_0 = 0$, ovvero, nel nostro caso

$$\alpha - \beta = 0\,.$$

Abbiamo quindi in definitiva

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{2\alpha^2 + 2} = \dfrac{z - \beta}{\alpha - \beta} \\ \alpha - \beta = 0. \end{cases}$$

Queste sono le equazioni parametriche generalizzate della rigata; eliminando i parametri si ottiene l'equazione cartesiana della rigata:

$$\frac{x}{z} = \frac{y}{2z^2 + 2}.$$

Esercizio 4.32.

Determinare l'equazione cartesiana della superficie rigata luogo delle rette che si appoggiano alla curva $\mathscr{C}$ di equazioni

$$\begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = t \\ z = t^3 + 2t \end{cases}$$

ed alla retta r *di equazioni*

$$\frac{x}{2} = y = z$$

e che sono paralleli al piano xy.

Sia $P(2\alpha, \alpha, \alpha)$ un generico punto di r e $Q(t^2 + 2, t, t^3 + 2t)$ un generico punto di $\mathscr{C}$ (fig. 4.9); la retta PQ ha quindi equazioni

$$\frac{x - 2\alpha}{t^2 + 2 - 2\alpha} = \frac{y - \alpha}{t - \alpha} = \frac{z - \alpha}{t^3 + 2t - \alpha}.$$

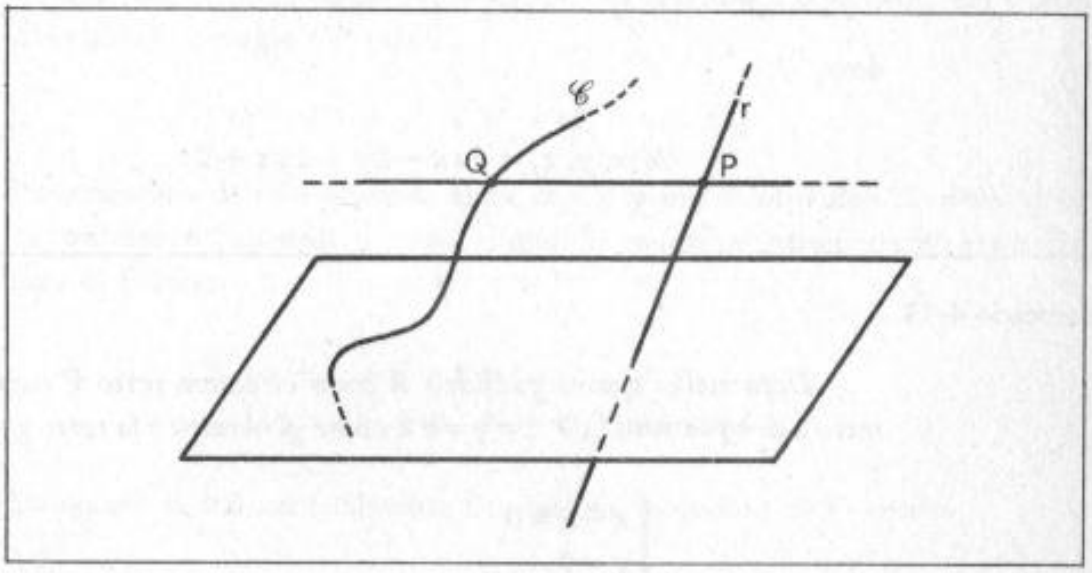

Figura 4.9

Imponendo la condizione di parallelismo di tale retta con il piano xy deve, inoltre, essere

$$t^3 + 2t - \alpha = 0.$$

Le equazioni parametriche generalizzate della rigata sono pertanto espresse dal sistema

$$\begin{cases} z = \alpha \\ (t-\alpha)(x-2\alpha) = (t^2 + 2 - 2\alpha)(y-\alpha) \\ t^3 + 2t - \alpha = 0. \end{cases}$$

Eliminando i parametri si ottiene l'equazione cartesiana cercata. Giunti al sistema

$$\begin{cases} (z-y)t^2 + (x-2z)t = zx - 2z^2 + (2-2z)(y-z) = \\ \quad = zx + 2y - 2yz - 2z \\ t^3 + 2t = z \end{cases}$$

ci si può servire, per l'eliminazione del parametro t, del metodo del risultante. Esso deve essere del quinto ordine essendo le equazioni rispettivamente del secondo e terzo ordine; si ha:

$$\begin{vmatrix} z-y & x-2z & M(x,y,z) & 0 & 0 \\ 0 & x-y & x-2z & M(x,y,z) & 0 \\ 0 & 0 & z-y & x-2z & M(x,y,z) \\ 1 & 0 & 2 & -z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -z \end{vmatrix} = 0$$

dove

$$M(x, y, z) = -zx - 2y + 2yz + 2z\,.$$

Esercizio 4.33.

Dato nello spazio euclideo il cono circolare retto Γ *avente per asse la retta* a *di equazioni* $x - 2 = y = z$ *e come generatrice la retta* g *di equazioni*

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

determinare il luogo dei punti di Γ *equidistanti dalla retta* s *di equazioni*

$$\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z}{2}$$

e dall'origine.

Determiniamo anzitutto l'equazione cartesiana del cono pensando Γ come l'insieme di circonferenze che hanno il centro sull'asse a e passano per la generatrice g.

Detto $P(2, 0, \alpha)$ un punto generico di g, l'equazione del piano π normale all'asse a e passante per P (fig. 4.10) è

$$x + y + z - 2 - \alpha = 0,$$

avendo notato che i coefficienti angolari di π sono $l : m : n = 1 : 1 : 1$.

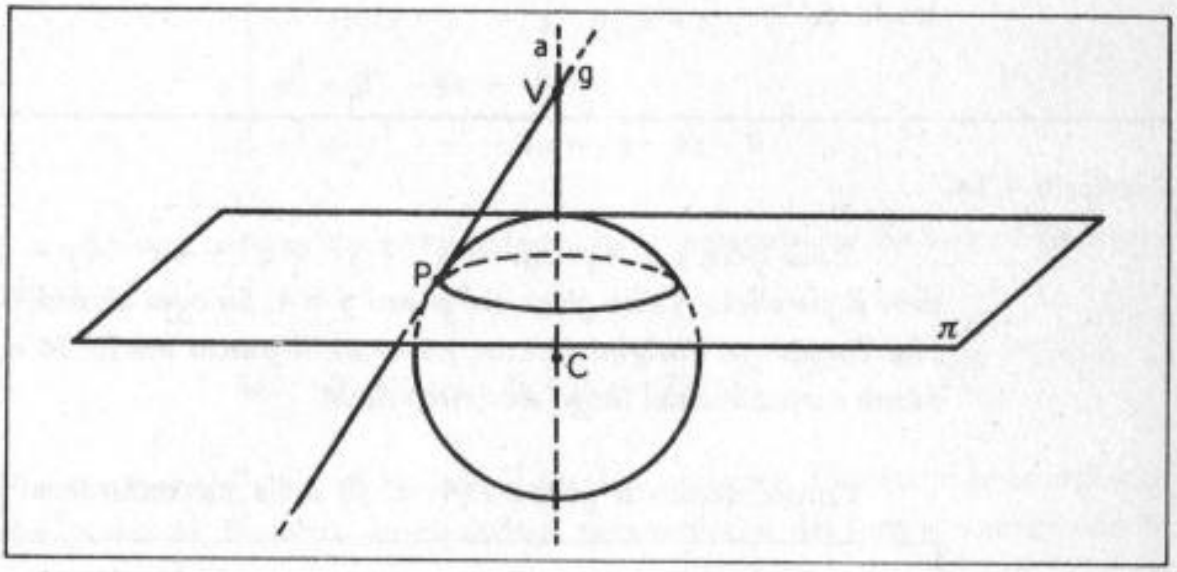

Figura 4.10

Considerato il punto qualunque $C(2, 0, 0)$ dell'asse, l'equazione della sfera di centro C e raggio CP vale

$$(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \ ;$$

l'intersezione di tale generica sfera con il piano π individua l'insieme delle circonferenze formanti il cono, quindi le equazioni parametriche generalizzate di Γ sono:

$$\begin{cases} x + y + z - 2 - \alpha = 0 \\ (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2. \end{cases}$$

Da queste si deduce facilmente l'equazione cartesiana di Γ; risulta:

$$xy + xz - 2y - 2z + yz = 0 \ .$$

Per determinare il luogo cercato si considera un punto generico $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ del cono e si impone che le sue distanze dalla retta s e dall'origine O siano

uguali. L'equazione del piano σ passante per Q e perpendicolare alla retta s è

$$2(x-\alpha)+(y-\beta)+2(z-\gamma)=0,$$

quindi detto H il punto di intersezione di σ con s, si ha

$$H\left[\frac{2}{9}(2\alpha+\beta+2\gamma-1),\frac{2\alpha+\beta+2\gamma+8}{9},\frac{2}{9}(2\alpha+\beta+2\gamma-1)\right].$$

A questo punto basta determinare le distanze $\overline{QH}$ e $\overline{QO}$ e uguagliarle tra loro.

Esercizio 4.34.

Sulla sfera s *di equazione* $x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0$ *si consideri il parallelo* γ *che giace sul piano* $x=4$. *Su ogni arco di cerchio massimo che congiunge l'origine* O *con* γ *trovare il punto medio* M *e scrivere l'equazione cartesiana del luogo descritto da* M.

Consideriamo il punto $P(4, \alpha, \beta)$ della circonferenza γ (fig. 4.11); af-

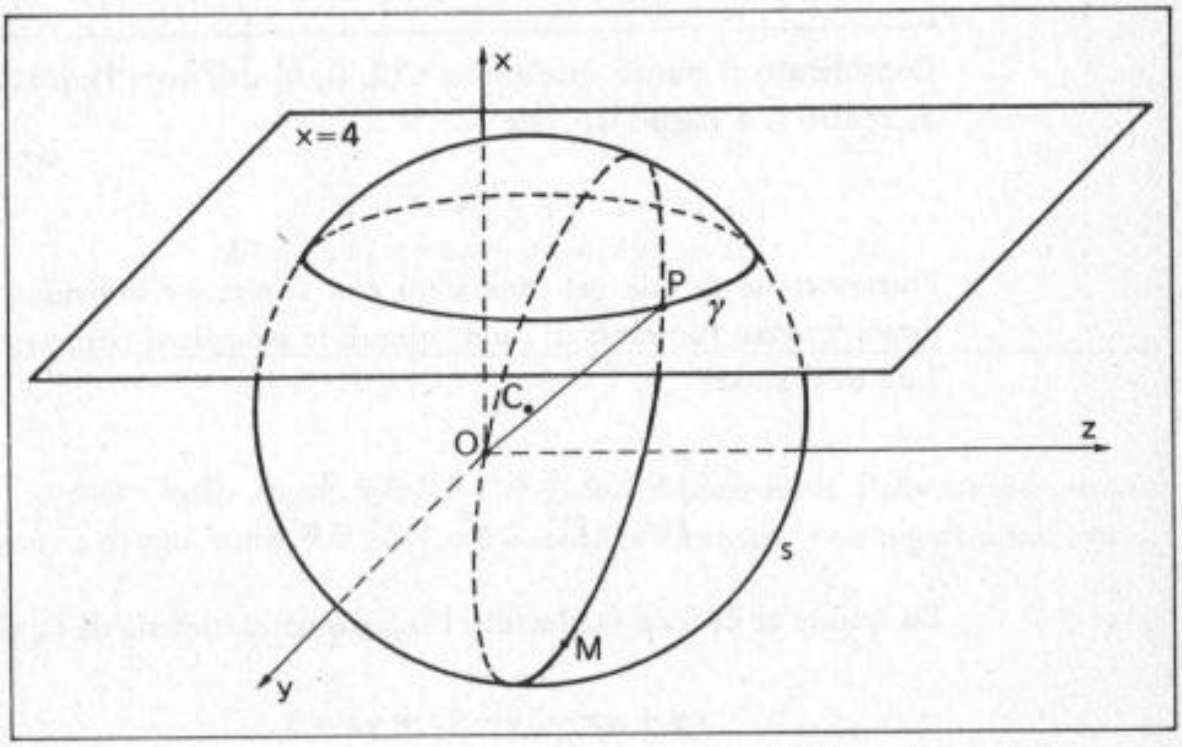

Figura 4.11

finchè P appartenga anche alla sfera deve essere soddisfatta la condizione:

$$16+\alpha^2+\beta^2-16-4\alpha-4\beta=0.$$

Un cerchio massimo si ricava dall'intersezione di un piano passante per O, C, P con la sfera data. A sua volta l'equazione del piano per O, C, P si ottiene dall'equazione del fascio di piani aventi per sostegno la retta OC imponendo, come ulteriore condizione, il passaggio per il punto P; risulta

$$(4-\beta)(x-y)+(\alpha-4)(x-z)=0\,.$$

Le equazioni parametriche del generico cerchio massimo sono quindi date dal seguente sistema:

$$\begin{cases}(4-\beta)(x-y)+(\alpha-4)(x-z)=0\\ \alpha^2+\beta^2-4\alpha-4\beta=0\\ x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0.\end{cases}$$

Il piano perpendicolare al segmento OP passante per il centro C ha equazione

$$4(x-2)+\alpha(y-2)+\beta(z-2)=0;$$

l'intersezione di tale piano con il cerchio massimo determina le coordinate del punto M. Pertanto le equazioni parametriche del luogo descritto da M sono date dal sistema

$$\begin{cases}(4-\beta)(x-y)+(\alpha-4)(x-z)=0\\ \alpha^2+\beta^2-4\alpha-4\beta=0\\ x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z=0\\ 4(x-2)+\alpha(y-2)+\beta(z-2)=0.\end{cases}$$

Se in tale sistema si considerano la prima e la quarta come equazioni a parte e, con la regola di Cramer, si ricavano α e β in funzione di x, y, z, sostituendo successivamente le espressioni ottenute nella seconda, si ha che quest'ultima e la terza rappresentano le equazioni cartesiane del luogo cercato.

Esercizio 4.35. *Nello spazio euclideo ordinario si scrivano le equazioni cartesiane del luogo dei punti* P *che distano* 2 *dalla retta* s *di equazioni*

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

e tali che la retta OP *formi con la retta* r *di equazioni* $x/2 = y = z$ *un angolo di* $\pi/4$ *radianti.*

Il luogo può ritenersi individuato dall'intersezione del cilindro Σ che ha come generatrici le rette parallele ad s e distanti 2 da essa con il cono Γ di vertice O che ha per generatrici le rette formanti con r un angolo di $\pi/4$ radianti (fig. 4.12).

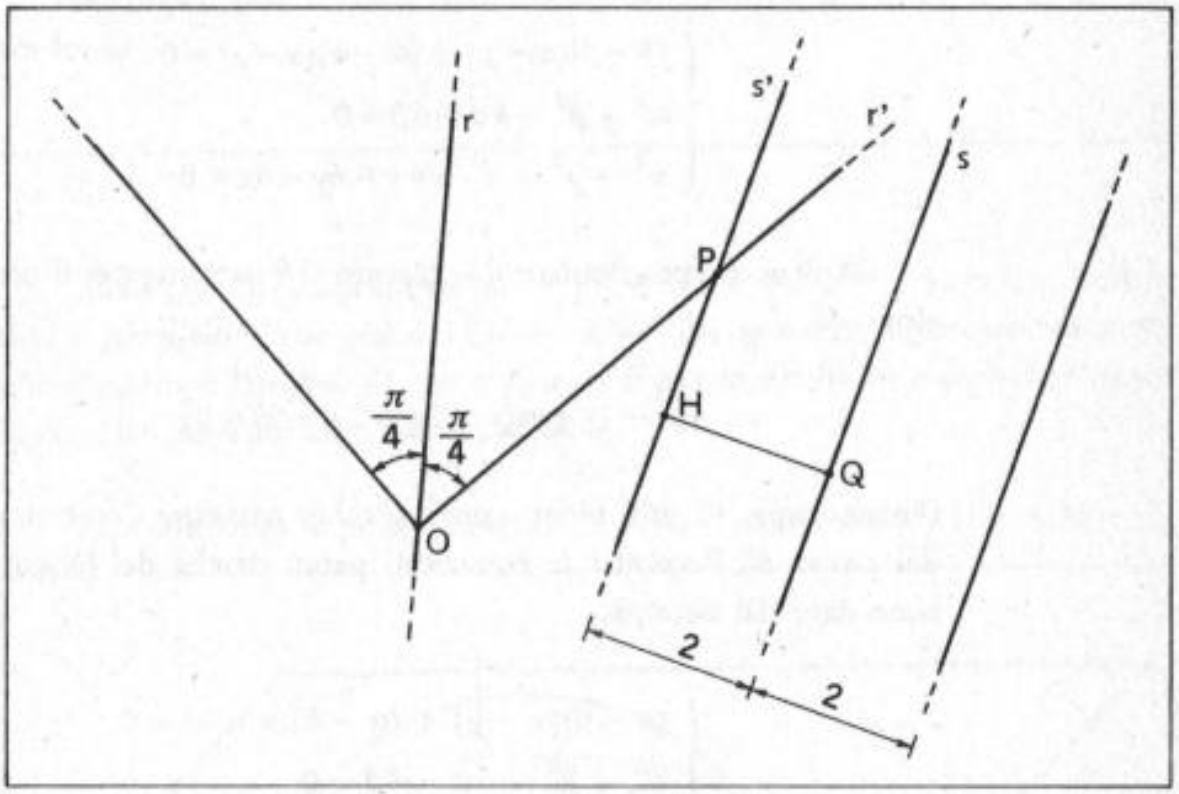

Figura 4.12

Cominciamo col determinante il cilindro Σ. Dato che il punto improprio di s è S_∞ (1, − 2, 0, 0), detto $Q(0, 1, 3)$ un punto di s, l'equazione del piano π passante per Q e perpendicolare ad s è

$$1(x-0) - 2(y-1) + 0(z-3) = 0.$$

Sia s' una generica retta parallela ad s di equazioni

$$(4.35.1) \qquad \begin{cases} 2x + y = h \\ z = k; \end{cases}$$

detto H il punto intersezione di s' col piano π si ha

$$H\left(\frac{2h-2}{5}, \frac{h+4}{5}, k\right).$$

Considerando le (4.35.1) e imponendo alla distanza $\overline{QH}$ di essere uguale a 2 si ottengono le equazioni parametriche generalizzate del cilindro:

$$\begin{cases} 2x+y=h \\ z=k \\ \left(\frac{2h-2}{5}\right)^2+\left(\frac{h+4}{5}-1\right)^2+(k-3)^2=4\,. \end{cases}$$

Da tale sistema si può dedurre facilmente l'equazione cartesiana di Σ; risulta

$$\frac{(2x+y-1)^2}{5}+(z-3)^2=4\,. \tag{4.35.2}$$

Determiniamo ora il cono Γ. Una generica retta r' uscente da O ha equazioni

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n};$$

se si vuole che r' formi con r un angolo di $\pi/4$ radianti dovrà essere verificata la condizione

$$\cos\, r r' = \frac{2\cdot l+1\cdot m+1\cdot n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{6}}=\cos\frac{\pi}{4}\,.$$

Il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2l+m+n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{x}{l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n} \end{cases} \tag{4.35.3}$$

rappresenta le equazioni parametriche generalizzate del cono. Vediamo ora di dedurre dalle (4.35.3) l'equazione cartesiana di Γ; possiamo scrivere

$$\begin{cases} 2(2l+m+n)^2=6(l^2+m^2+n^2) \\ x/z=l/n \\ y/z=m/n\,. \end{cases} \tag{4.35.4}$$

Sviluppando la prima delle (4.35.4) si ha

$$l^2 - 2m^2 - 2n^2 + 4lm + 4ln + 2mn = 0$$

ossia, dividendo per $n^2 \neq 0$,

$$\left(\frac{l}{n}\right)^2 - 2\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2 + 4\frac{l}{n}\cdot\frac{m}{n} + 4\frac{l}{n} + 2\frac{m}{n} = 0,$$

da cui, utilizzando la seconda e la terza delle (4.35.4), segue

$$\frac{x^2}{z^2} - 2\frac{y^2}{z^2} - 2 + 4\frac{xy}{z^2} + 4\frac{x}{z} + 2\frac{y}{z} = 0. \tag{4.35.5}$$

La (4.35.5) rappresenta l'equazione cartesiana del cono.

Il sistema formato dalle (4.35.2) e (4.35.5), cioè

$$\begin{cases} \dfrac{(2x+y-1)^2}{5} + (z-3)^2 = 4 \\ \dfrac{x^2}{z^2} - 2\dfrac{y^2}{z^2} - 2 + 4\dfrac{xy}{z^2} + 4\dfrac{x}{z} + 2\dfrac{y}{z} = 0, \end{cases}$$

individua le equazioni cartesiane del luogo cercato.

Esercizio 4.36.

E' data la sfera Σ *di raggio* 2 *e centro l'origine* O. *Si mandi il piano tangente ad essa in* P *e sia* Q *l'intersezione di questo piano con l'asse* x. *Determinare l'equazione cartesiana del luogo descritto da* Q', *simmetrico di* Q *rispetto a* P, *al variare di* P.

Affinchè $P(\alpha, \beta, \gamma)$ appartenga alla sfera Σ deve essere:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4.$$

L'equazione del piano π tangente in P a Σ (fig. 4.13) è

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - 4 = 0,$$

quindi le coordinate di Q si ottengono considerando il sistema

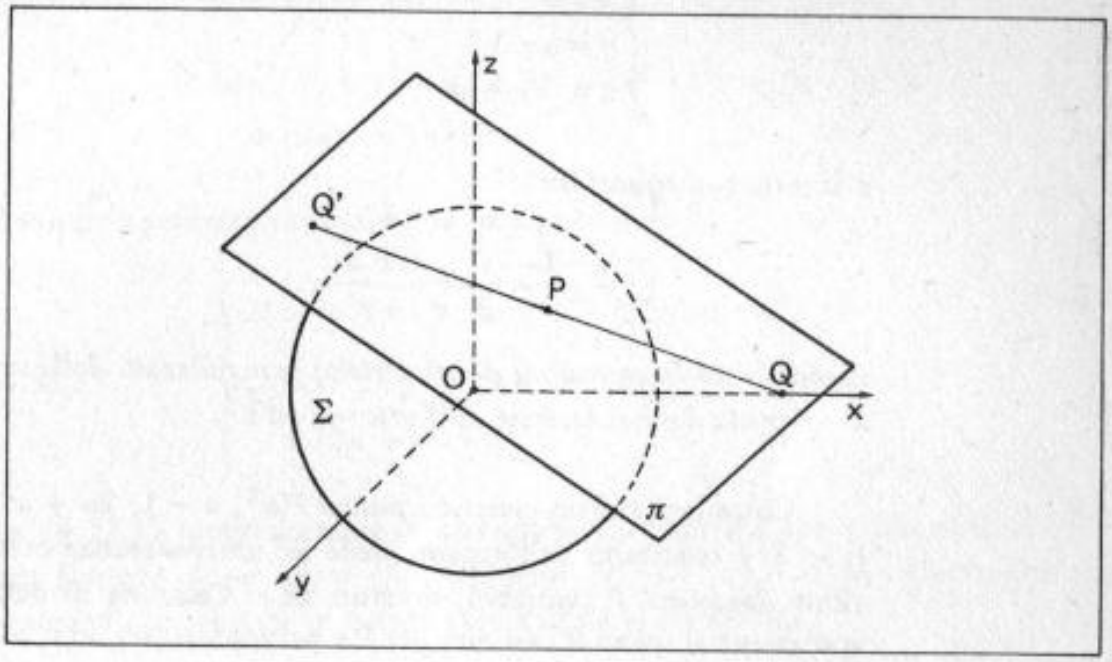

Figura 4.13

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z - 4 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0\,; \end{cases}$$

si ha

$$Q\left(\frac{4}{\alpha}, 0\,, 0\right)\,.$$

Essendo P il punto medio di QQ', le coordinate x, y, z di Q' sono tali che

$$\begin{cases} x + \dfrac{4}{\alpha} = 2\,\alpha \\ y = 2\beta \\ z = 2\gamma \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4\,. \end{cases}$$

Pertanto l'equazione cartesiana del luogo cercato è

$$\left(\frac{8 - y^2 - z^2}{2x}\right)^2 = \frac{16 - y^2 - z^2}{4}\,.$$

Esercizio 4.37.

Data la curva $\mathscr{C}$ di equazioni

$$\begin{cases} x = u^2 \\ y = u - 1 \\ z = 2u + u^3 \end{cases}$$

e la retta r *di equazioni*

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+5}{-1} ,$$

determinare le equazioni parametriche generalizzate della superficie rotondà Σ *ottenuta dalla rotazione di* $\mathscr{C}$ *attorno ad* r.

Consideriamo un generico punto $P(u^2, u-1, 2u+u^3)$ di $\mathscr{C}$. La superficie Σ è costituita dall'insieme delle ∞^1 circonferenze ottenute dalla rotazione dei punti P (variabili) attorno ad r. Ciascuna di dette circonferenze appartiene al piano α passante per P e perpendicolare ad r, di equazione

$$2(x-u^2) + 3(y-u+1) - (z-2u-u^3) = 0 .$$

Per determinare la circonferenza occorre intersecare il piano generico α con una sfera avente come centro C un punto (scelto in maniera arbitraria) su r e di raggio CP (fig. 4.14)

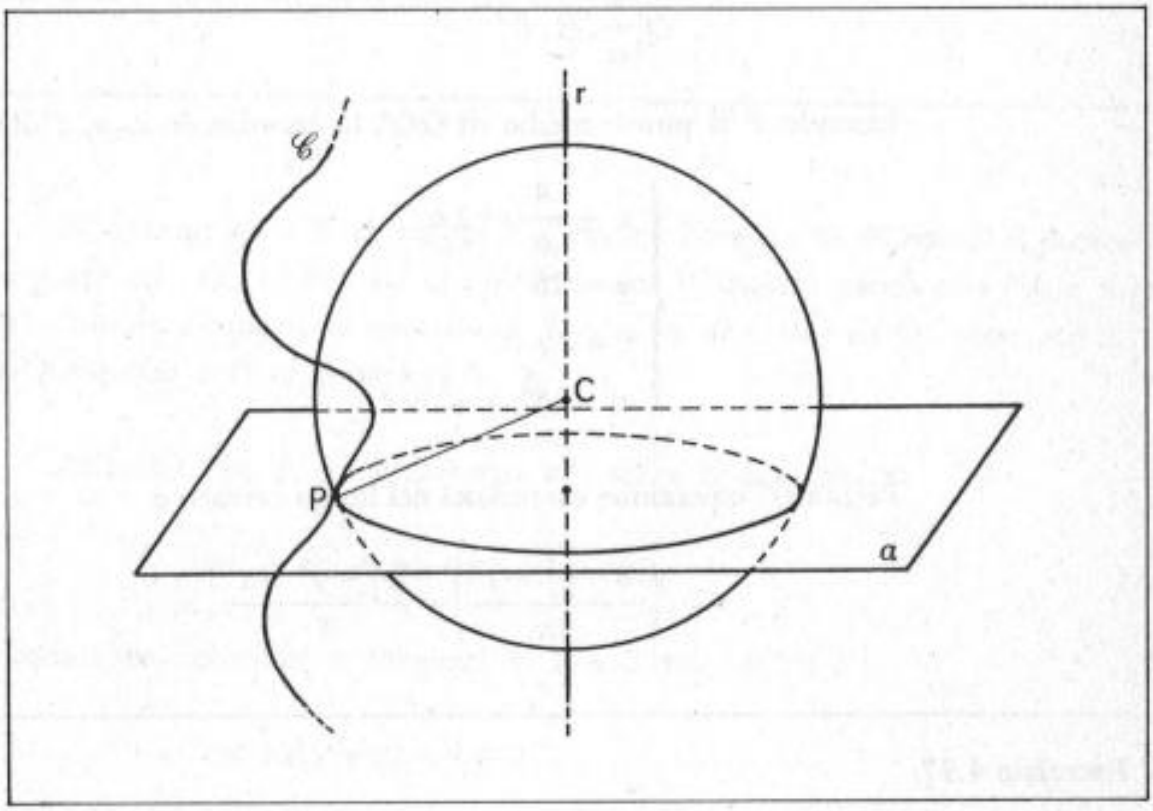

Figura 4.14

Come punto C scegliamo $(1, 0, -5)$ che soddisfa le equazioni della r; l'equa-

zione della sfera è la seguente

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+5)^2 = (u^2-1)^2 + (u-1)^2 + \\ + (2u + u^3 + 5)^2 .$$

Dunque la generica circonferenza ha equazioni:

$$(4.37.1) \qquad \begin{cases} 2(x-u^2) + 3(y-u+1) - (z-2u-u^3) = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+5)^2 = (u^2-1)^2 + (u-1)^2 + \\ \quad + (2u+u^3+5)^2 . \end{cases}$$

Le (4.37.1) rappresentano la circonferenza generica come intersezione di una famiglia di ∞^1 piani e di ∞^1 sfere: le (4.37.1) dunque rappresentano la superficie richiesta in forma parametrica generalizzata.

Esercizio 4.38.

Data la curva $\mathscr{C}$ di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

si determini l'equazione cartesiana del solido ottenuto dalla rotazione di $\mathscr{C}$ attorno all'asse x.

Un punto generico di P di $\mathscr{C}$ ha coordinate (α, β, γ) che soddisfano le equazioni di $\mathscr{C}$, cioè tali che

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 - \gamma + 1 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0 . \end{cases}$$

Un punto scelto a piacere sull'asse x è, per esempio, l'origine $0(0, 0, 0)$. L'asse x ha come coefficienti direttivi

$$l : m : n = 1 : 0 : 0,$$

quindi il piano per P perpendicolare all'asse x ha equazione

$$x - \alpha = 0,$$

inoltre la sfera di centro 0 e raggio OP ha equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 .$$

La superficie richiesta si presenta pertanto sotto la seguente forma parametrica generalizzata

$$\begin{cases} x - \alpha = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma + 1 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Eliminando α, β, γ, troveremo l'equazione in forma cartesiana. Si ha

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y^2 + z^2 = \beta^2 + \gamma^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \gamma + 1 = 0 \\ \beta^2 = 1 - x^2 \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = 1 - x^2 \\ \gamma = x^2 + (1 - x^2)^2 + 1, \end{cases}$$

dalle quali segue

$$y^2 + z^2 = (1 - x^2)^2 + \left[x^2 + (1 - x^2)^2 + 1\right]^2 .$$