Guida allo studio del capitolo 19

Il capitolo 19 tratta le:
Teoria di Maxwell
Onde elettromagnetiche

Per quello che riguarda Maxwell c'è ben poco di intuitivo, sono sostanzialmente un approfondimento matematico delle equazioni già incontrate in precedenza.

Nei primi anni del XIX i vari scienziati erano arrivati a formulare **empiricamente** le principali leggi dell'elettricità e del magnetismo riconosciuti poi come un unico fenomeno appunto chiamato elettromagnetismo. In particolare le leggi sono: **pag**

Legge di Gauss per il campo elettrico $\Phi\left(\vec{E}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$ **97**

Legge di Gauss per il campo magnetico $\Phi\left(\vec{B}\right) = 0$ **98**

Legge di Faraday-Neumann-Lenz $f.e.m. = -\frac{\Delta\Phi\left(\vec{B}\right)}{\Delta t}$ **99**

Legge di Ampere $\Sigma\left(B_{parallela} \cdot \Delta l\right) = \mu_0 I_{concatenate}$ **100**

La legge di Gauss per il campo elettrico è stata utilizzata impiegando particolari superfici (sfera, cilindro) dette gaussiane per poter svolgere calcoli in modo semplice.

Successivamente lo scienziato Maxwell diede a queste leggi un rigoroso aspetto matematico trovando anche che la Legge di Ampere nella formulazione originale era **incompleta**

NOTA uno degli argomenti A PIACERE più scelto all'orale dell'esame era proprio questa parte ma quasi tutti si limitano a ripetere a memoria le 4 equazioni di sopra nella forma proposta da Maxwell MA omettendo di spiegare perché la quarta equazione è da modificare. Adesso l'orale è cambiato, non ci sono più le domande a piacere.

Prima di passare alle equazioni di Maxwell occorre puntualizzare alla luce delle vostre recenti conoscenze sul calcolo differenziale ed integrale due aspetti matematici

Flusso di un generico vettore $\vec{V}$ **97**

Data una regione di spazio dove è presente il vettore $\vec{V}$ che può variare sia in modulo che in direzione e verso in ogni punto di questa regione, si sceglie una superficie S e si va a calcolare il prodotto scalare tra il vettore $\vec{V}$ e il vettore $\vec{A}$ rappresentativo della superficie.
Cos'è il vettore d'area? Il vettore d'area è sempre perpendicolare alla superficie. Ma se la superficie è curva?

Ricordiamo una semplice applicazione del flusso.
Consideriamo un tubo in cui sta scorrendo l'acqua. Ogni particella di acqua ha velocità $\vec{v}$, per semplicità consideriamo che in tutti i punti all'interno del tubo la velocità sia la stessa.

Si prende una sezione TRASVERSALE del tubo: l'area di questa sezione vale A. Il vettore associato a questa area A risulta PER DEFINIZIONE perpendicolare all'area stessa e lo indichiamo con $\vec{A}$ quindi i due vettori risultano paralleli
Il flusso è prodotto scalare tra i due vettori $\vec{V}$ e $\vec{A}$ cioè

$$\Phi\left(\vec{v}\right) = \vec{v} \cdot \vec{A} = v \cdot A \cdot \cos\left(0°\right) = vA$$

Ma il prodotto vA cioè tra la velocità del liquido e l'area del tubo non è altro che la portata Q.

Un'altra situazione elementare di calcolo del flusso di un vettore si ha riguardo il campo elettrico prodotto da una carica elettrica. Le linee del campo elettrico sono radiali nello spazio uscenti dalla carica. A una distanza uguale dalla carica il campo elettrico E ha lo stesso valore ma direzione diversa.
Considerando una superficie sferica con centro proprio la carica il calcolo del flusso del vettore E attraverso la superficie sferica risulta semplice perché andiamo a considerare piccole aree sulla superficie di questa sfera.

Per ogni porzione di area in cui immaginiamo di scomporre la superficie sferica il vettore $\vec{A}$ deve risultare perpendicolare e quindi diretto come il raggio della sfera nel punto centrale "rappresentativo" dell'area. Questo è tanto più plausibile tanto più considero piccola la porzione di area.

Allora in ogni piccola porzione di area il vettore $\vec{E}$ ed il vettore area $\vec{A}$ risultano paralleli.

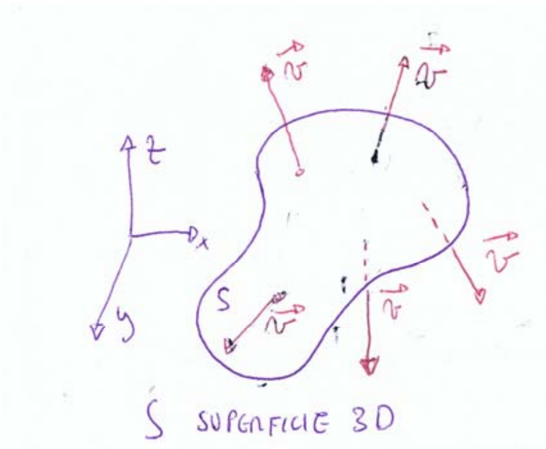
Il flusso di $\vec{E}$ quindi è dato dalla somma di tutti i prodotti ottenuti per ogni singola area cioè

$\Phi(\vec{E}) = \Sigma(\vec{E} \cdot \Lambda\vec{A}) = \Sigma(E \cdot \Lambda A \cos 0°) \rightarrow$ poichè $\vec{E}$ ha sempre lo stesso valore $\rightarrow E \cdot \Sigma(\cdot\, \Lambda A)$
Ma $\Sigma(\cdot\, \Lambda A) = S_{SFERA} = 4\pi r^2$ per cui

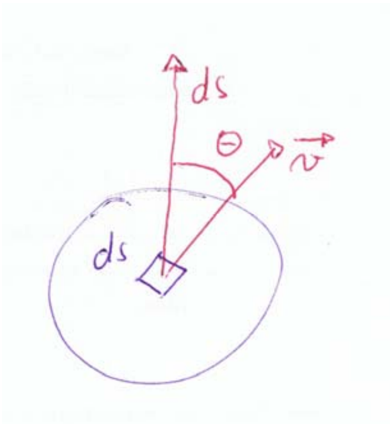
$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi \cdot r^2 E$$

Ma ATTENZIONE le due situazioni analizzate sono CASI PARTICOLARI che risultano semplici.

Cosa succede se la superficie attraversata S dal vettore $\vec{v}$,è "strana" e cosa succede se la distribuzione in modulo e direzione del vettore $\vec{v}$, è variabile da punto a punto a punto della superficie S?



Occorre innanzitutto andare a scomporre la superficie S in aree INFINITESIMALI che indichiamo con la notazione ds che si legge DE ESSE dove il lettera "d" sta a significare "quantità infinitesimale" della GRANDEZZA "s" che in QUESTO CASO indica una superficie (ma potrebbe essere una lunghezza, una massa, una carica elettrica ecc. ecc)



Su questa piccola area “aerola” facciamo una ipotesi molto importante cioè diciamo che il vettore $\vec{v}$ è costante (sia in modulo che in direzione) su tutta l’area. Questa ipotesi è pienamente plausibile perche l’areola ds è talmente piccola che può essere considerata quasi un punto

Allora possiamo calcolare il flusso di $\vec{v}$ in questa area ma poiché stiamo considerando un area ristrettissima anche il flusso sarà “infinitesimale”

$$d\Phi\left(\vec{v}\right)=\vec{v}\cdot d\vec{s}=v\cdot\cos\theta\cdot ds$$

Per avere il flusso totale devo sommare questi contributi infinitesimali. Quanti sono questi contributi? 100? 1000? No! sono tendenti all’infinito.
Qual è lo strumento matematico che somma una infinità di termini infinitesimali? L’INTEGRALE.

Se avessimo una quantità FINITA di contributi del flusso FINITI scriveremmo

$$\Phi\left(\vec{v}\right)=\sum\vec{v}\cdot\Delta\vec{s}=\sum v\cdot\Delta v\cdot\cos\theta$$

Ed è quello che in pratica abbiamo fatto nei due casi semplici iniziali ma per quello che riguarda il caso generale si scrive invece

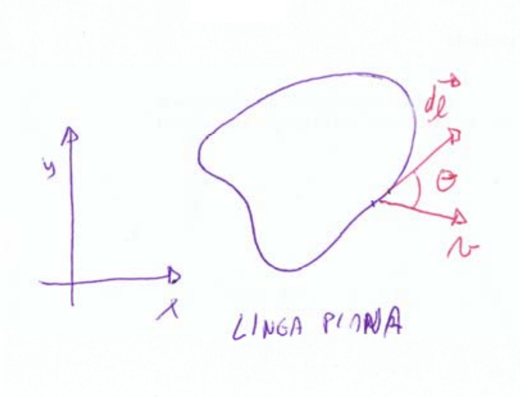
$$\Phi\left(\vec{v}\right)=\int_s d\left[\Phi\left(\vec{v}\right)\right]=\int_S\vec{v}\cdot d\vec{s}=\int_S v\cdot\cos\theta\cdot ds$$

Circuitazione di un vettore V **99**

Nella legge di Ampere invece viene sfruttata la Circuitazione di un vettore.

Abbiamo nel piano una linea chiusa, in ogni punto esiste il vettore $\vec{v}$ variabile in modulo e direzione in ogni punto della curva. Stiamo considerando il vettore $\vec{v}$ e la linea COMPLANARI.

Alla linea andiamo associare il vettore di linea $\vec{l}$. Il vettore di linea è tangente alla curva come in figura mentre il vettore $\vec{v}$ ha direzione qualsiasi



Vogliamo calcolare il prodotto scalare tra il vettore linea e $\vec{v}$ che si chiama circuitazione del vettore ovvero $C(\vec{v})$. Questo prodotto cambia in ogni posizione della linea perciò anche in questo caso la linea deve essere suddivisa in tratti infinitesimali dl.

In questi tratti infinitesimali (praticamente puntiformi) si può fare l'ipotesi che il vettore $\vec{v}$ rimanga costante. Possiamo calcolare i prodotti in ogni tratto infinitesimale che danno luogo pertanto a prodotti infinitesimali

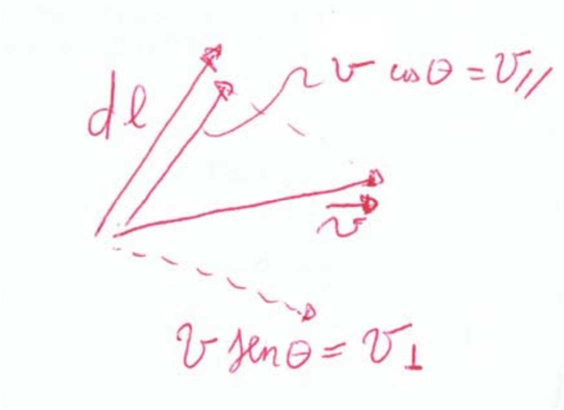
$$dC(\vec{v}) = \vec{v} \cdot d\vec{l} = v \cdot \cos\theta \cdot dl$$

Per avere la circuitazione totale devo sommare questi contributi infinitesimali con l'operazione di somma INTEGRALE. . Perciò la CIRCUITAZIONE del vettore s $\vec{v}$ au una linea chiusa γ vale

$$C(\vec{v}) = \oint_{\gamma} d\left[C(\vec{v})\right] = \oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{\gamma} v \cdot \cos\theta \cdot dl$$

Il simbolo dell'integrale con il cerchietto $\oint$ sta ad indicare che il calcolo del prodotto scalare va fatto sull'intera linea chiusa

Se teniamo presente la scomposizione del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione tangente alla curva (parallela quindi al vettore Linea in quel tratto) e perpendicolare alla curva



risulta

$$v \cdot \cos\theta = v_{parallela}$$

Ovvero $$C\left(\vec{v}\right) = \oint_{\gamma} v_{parallela} \cdot dl$$

Alla luce delle considerazioni matematiche precedenti le 4 leggi precedentemente elencate vengono "riscritte" da Maxwell in forma esatta

La legge di Gauss per il campo elettrico $\Phi\left(\vec{E}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$ viene riscritta esplicitando il primo membro

PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL $$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$ **98**

Anche la legge di Gauss per il campo magnetico $\Phi\left(\vec{B}\right) = 0$ viene riscritta esplicitando il primo membro

SECONDA EQUAZIONE DI MAXWELL $$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$ **98**

Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz $f.e.m. = -\frac{\Delta\Phi\left(\vec{B}\right)}{\Delta t}$ i discorso è più articolato : il primo membro dell'equazione *f.e.m* o scritto anche brevemente $\mathcal{E}$ si definisce come:

il lavoro della forza elettrica $\vec{F}_e$ per unità di carica per spostare lungo il circuito (una linea chiusa quindi) la carica elettrica q

$$\mathcal{E} = \frac{L}{q}$$

Ricordiamo due elementi fondamentali

Il Lavoro è il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento $L = \vec{F} \cdot \vec{s}$

La Forza elettrica è il prodotto tra carica e campo elettrico $\vec{F}_e = q\vec{E}$

$$\mathcal{E} = \frac{L}{q} = \frac{\vec{F}_e \cdot \vec{s}}{q} = \frac{q\vec{E} \cdot \vec{s}}{q} = \vec{E} \cdot \vec{s}$$

Ora poichè il valore di $\vec{E}$ cambia lungo la linea γ che costituisce il circuito il prodotto scalare tra campo $\vec{E}$ e linea non è altro che la CIRCUITAZIONE del vettore $\vec{E}$ quindi

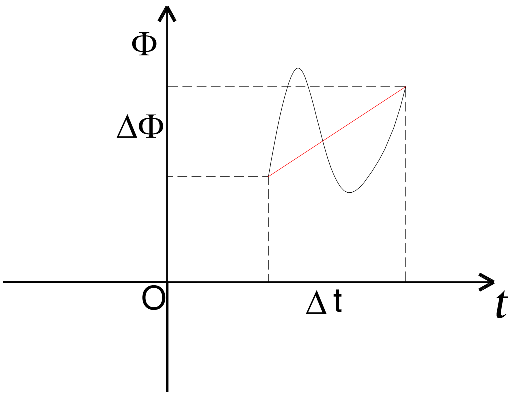
$$\mathcal{E} = C\left(\vec{E}\right) = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Al secondo membro avevamo $-\frac{\Delta\Phi\left(\vec{B}\right)}{\Delta t}$ dove vengono prese in considerazione quindi variazione FINITE del Flusso del vettore $\vec{B}$ al numeratore e variazione temporali FINITE al denominatore. Pertanto per rendere più efficace e aderente al fenomeno fisico** l'espressione esprimiamo variazioni INFINITESIMALI delle quantità al numeratore e denominatore ovvero $-\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}$ che in tale notazione in pratica il secondo membro è la derivata fatta rispetto al tempo del Flusso di $\vec{B}$

La legge di Faraday-Neumann-Lenz $f.e.m. = -\frac{\Delta\Phi\left(\vec{B}\right)}{\Delta t}$ la riscriviamo così

TERZA EQUAZIONE DI MAXWELL $\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$ 100

*Nota** considerando quantità discrete si vanno a considerare nell'intervallo Δt variazioni lineari della grandezza Φ che non corrispondono al suo'effettivo andamento nell'intervallo temporale*



Da ultimo consideriamo la legge di Ampere $\Sigma(B_{parallela} \cdot \Delta l) = \mu_0 I_{concatenate}$

Il primo membro non è altro che la somma dei prodotti scalari del vettore $\vec{B}$ con i tratti FINITI che compongono la linea g che "racchiude" e concatena le correnti. Considerando invece tratti infinitesimali ci rendiamo subito conto che il primo membro non è altro che la Circuitazione del vettore $\vec{B}$. $C(\vec{B}) = \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Perciò la legge di Ampere *potrebbe essere riscritta* come

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{concatenate}$$

100

MA L'EQUAZIONE NON E' COMPLETA!!!!, così come è scritta è solo un caso particolare

Confrontando la legge di Faraday e la legge di Ampere

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \quad \text{e} \quad \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{concatenate}$$

I membri di sinistra sono due Circuitazioni: per Faraday del vettore E, per la legge di Ampere del vettore B mentre i membri di destra sono dissimili.
Nella legge di Faraday una variazione del tempo del flusso del vettore produce un campo elettrico E.
Nella legge di Ampere solo in presenza di correnti si produce campo magnetico B.
C'è una dissimmetria tra le due leggi: perché per simmetria non può essere una variazione del flusso del campo elettrico E a produrre un campo magnetico B?

Su questa parte andiamo direttamente alla risposta.
Se qualcuno è volenteroso può vedersi la dimostrazione (difficilina) a pagina 101

Maxwell pertanto aggiunse un addendo contenente proprio la variazione del flusso del vettore campo elettrico E e la chiamo corrente di spostamento

$$I_{spostamento} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi\left(\vec{E}\right)}{dt}$$ **102**

La legge di Ampere GENERALIZZATA allora diventa

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(I_{concatenate} + I_{spostamento}\right)$$

E finalmente si può scrivere la

QUARTA EQUAZIONE DI MAXWELL $\displaystyle \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{concatenate} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi\left(\vec{E}\right)}{dt}$

La prima parte è dovuta alla corrente nei conduttori, la seconda alla corrente che si crea per variazione del campo elettrico

Le quattro equazioni di Maxwell sono riportate nel testo a pagina 104

IN ASSENZA DI CARICHE E CORRENTI assumono il seguente aspetto

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{e} \quad \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} \quad \text{e} \quad \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi\left(\vec{E}\right)}{dt}$$

Dalle ultime due si ha un risultato importante:

I campi elettrici e magnetici possono esistere anche in assenza di cariche elettriche e/o correnti e si influenzano reciprocamente **104**

Questo risulta fondamentale per lo studio delle onde elettromagnetiche

La tabella di pagina 105 invece riguarda gli effetti delle singole leggi sui singoli campi elettrici e magnetici **105**

Forza di Lorentz **105**

Una carica elettrica q in movimento con velocità $\vec{v}$ immersa in un campo magnetico $\vec{B}$ ed elettrico $\vec{E}$ è soggetta ai due campi e per sovrapposizione degli effetti dei due campi la forza complessiva detta di Lorentz vale

$$F = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$