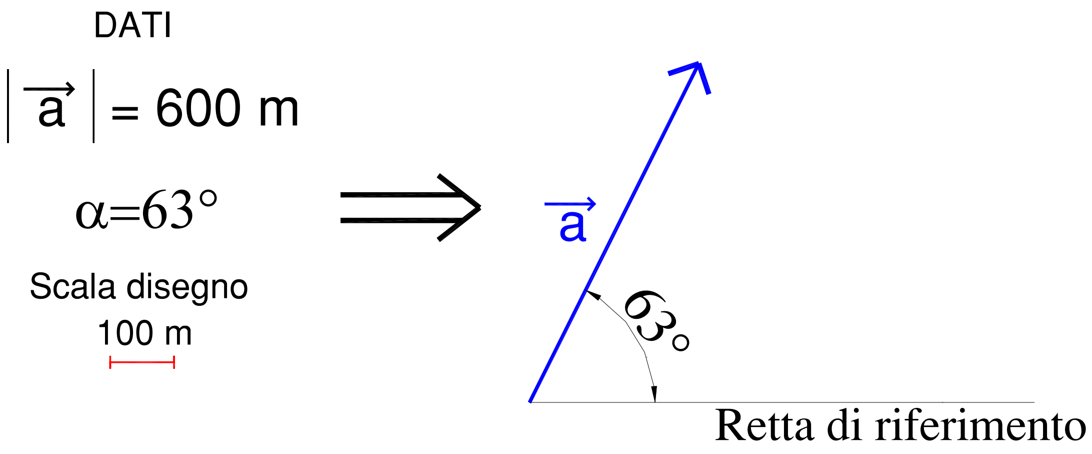
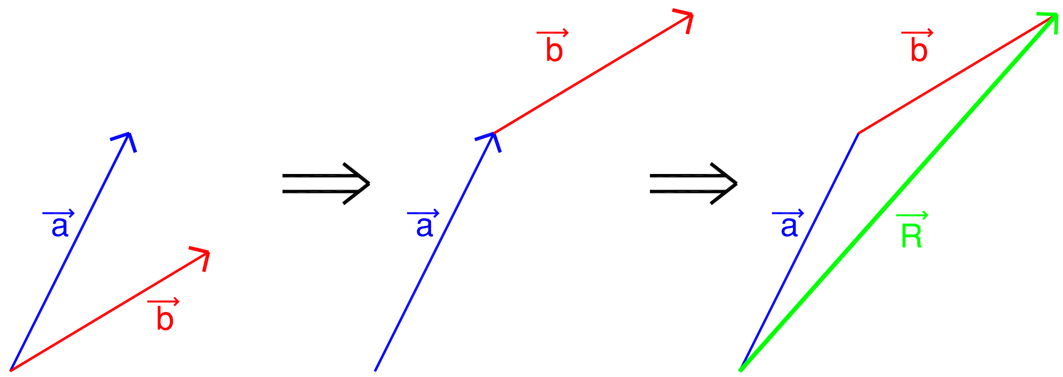
I VETTORI IN FORMA CARTESIANA

Il metodo grafico per assegnare i vettori e fare le operazioni con essi presenta difficoltà di esecuzione.
Se di un vettore è noto il modulo e la sua direzione (angolo rispetto ad una retta di riferimento) dopo averne stabilito la scala di rappresentazione il tracciamento richiede l'uso del righello e del goniometro.



La costruzione su carta delle schema per ottenere la somma o differenza comporta poi delle inevitabili inesattezze dovute al fatto che per applicare il metodo del poligono si deve riportare esattamente un vettore sulla punta di un altro mantenendo lo stesso modulo e la stessa direzione del vettore originale utilizzando le squadrette.



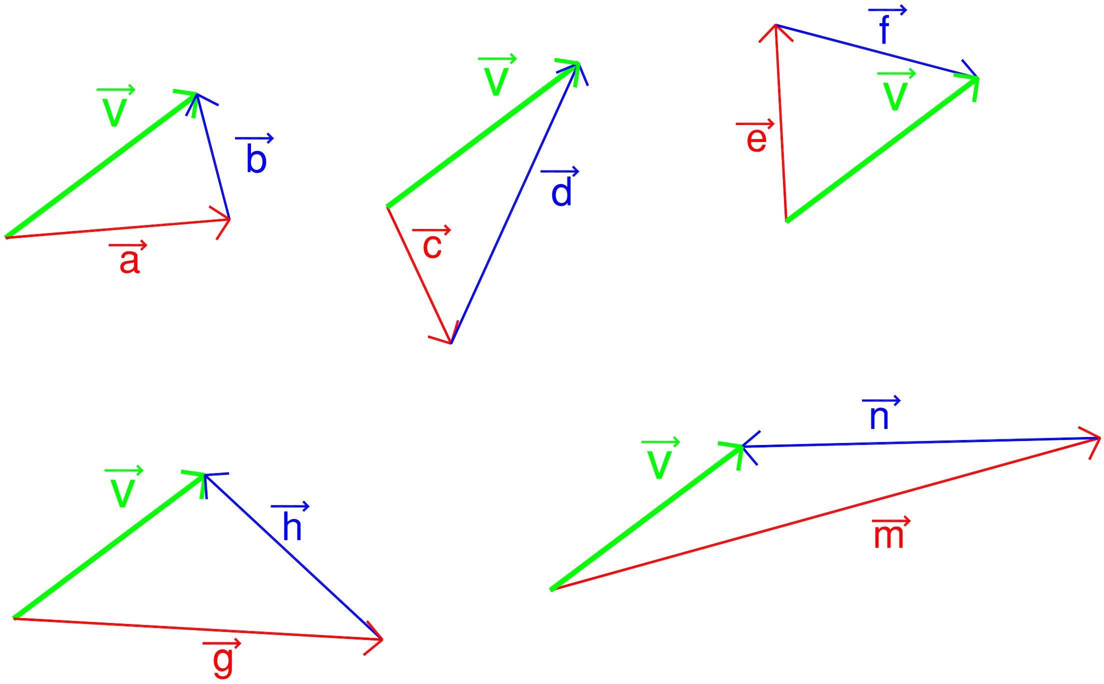
I vettori iniziali

Metodo grafico: il vettore $\vec{b}$ è trasportato sulla punta del vettore $\vec{a}$

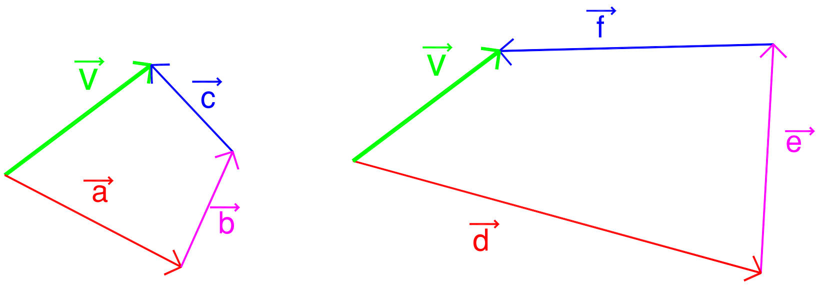
Il lato che chiude il poligono è la risultante $\vec{R}$ (in verde)

Il disegno sopra, come tutti gli altri, è realizzato con un programma di CAD ed è estremamente preciso cosa che utilizzando le squadrette non è assolutamente possibile.
Ma esiste un metodo più efficace per operare con i vettori evitando gli errori grafici ed è il metodo cartesiano.

Partiamo dal fatto che un qualsiasi vettore $\vec{v}$ può essere immaginato come la somma di due vettori qualsiasi: nella figura seguente il vettore disegnato in verde **è la somma si due altri vettori.**



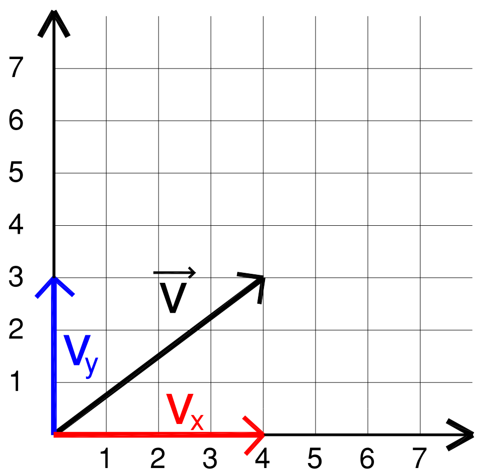
Quindi ci sono **infinite coppie** di vettori che sommandosi danno per risultato $\vec{v}$.
Non solo: $\vec{v}$ può essere immaginato come la somma di 3 o più vettori



Esprimere un vettore $\vec{v}$ come somma di 2 o più vettori si chiama **SCOMPOSIZIONE DI UN VETTORE.**

Vediamo come ci può essere utile. Sul foglio abbiamo la quadrettatura che ci permette di disegnare facilmente linee orizzontali e verticali rispetto al foglio.
Pertanto scomponiamo il vettore $\vec{v}$ in una somma di un vettore orizzontale e di un vettore verticale

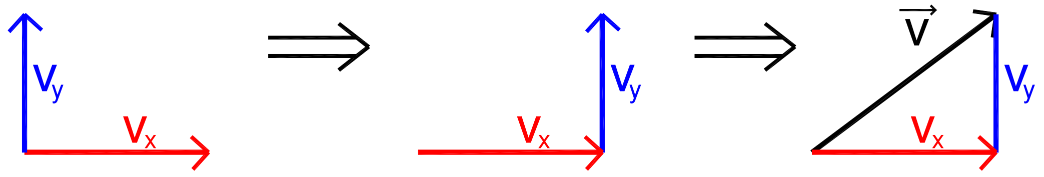
Introducendo un sistema di riferimento cartesiano con gli assi X ed Y abbiamo che



V_x vettore orizzontale diretto come l’asse X e detto COMPONENTE ORIZZONTALE di $\vec{v}$

V_y vettore verticale diretto come l’asse Y e detto COMPONENTE VERTICALE di $\vec{v}$

Sommando i due vettori componenti si ha proprio il vettore $\vec{v}$



Quindi un qualsiasi vettore $\vec{v}$ può essere descritto mediante le sue componenti

$$\vec{v} = \begin{cases} V_x = 4 \\ V_y = 3 \end{cases}$$ (dove i valori numerici 4 e 3 sono a titolo di esempio)

Altro modo più "compatto" per scrivere il vettore $\vec{v}$ è il seguente

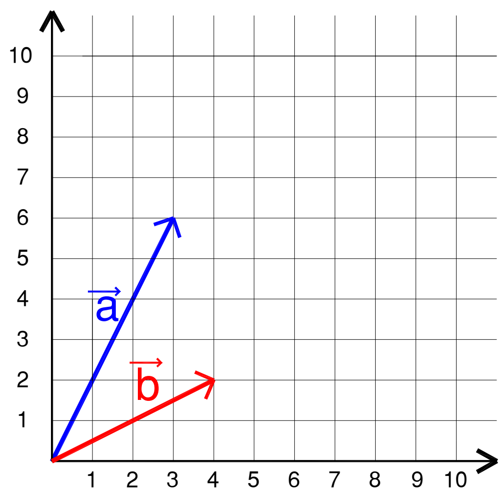
$$\vec{v} = 4\vec{x} + 3\vec{y}$$

dove i vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ stanno a significare che 4 è la componente lungo l'asse X e 3 è la componente lungo l'asse Y.

In alternativa ai vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ (utilizzati sul vostro testo) vengono utilizzate con lo stesso significato le lettere **i** e **j** (notazione che io preferisco) perciò il vettore $\vec{v}$ si esprime come:

$$\vec{v} = 4i + 3j$$

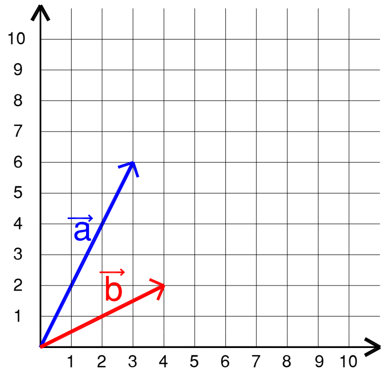
Vediamo ora come questo modo ci avvantaggia per le operazioni: partiamo da due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$



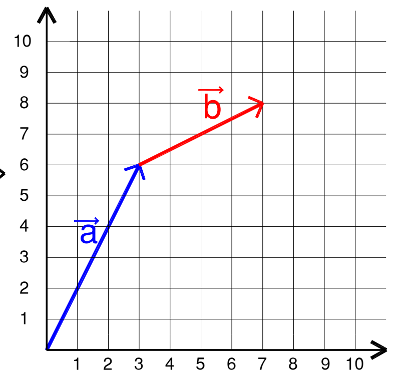
Scriviamo in due vettori in forma cartesiana "leggendo" le loro componenti dalla figura

$$\vec{a} = 3i + 6j \qquad \vec{b} = 4i + 2j$$

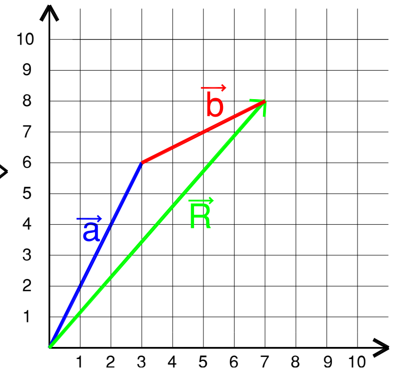
Adesso facciamo la somma con il metodo grafico del poligono



I vettori iniziali



Metodo grafico: il vettore $\vec{b}$ è trasportato sulla punta del vettore $\vec{a}$



Il lato che chiude il poligono è la risultante $\vec{R}$ (in verde)

Ottengo leggendo sul grafico che la risultante vale $\vec{R} = 7i + 8j$

Ma osserviamo che non c'era affatto bisogno di fare la costruzione grafica del poligono perché possiamo ragionare in questo modo:

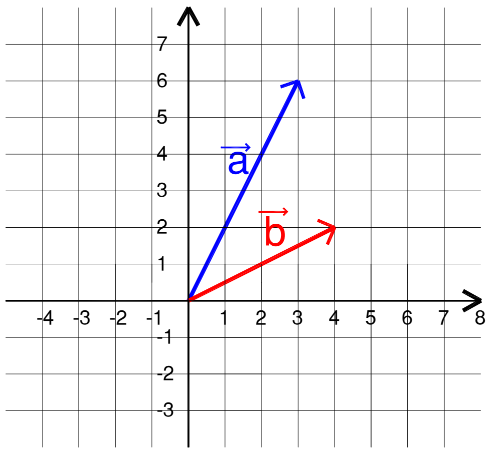
$$\vec{a} = 3i + 6j$$

$$\vec{b} = 4i + 2j$$

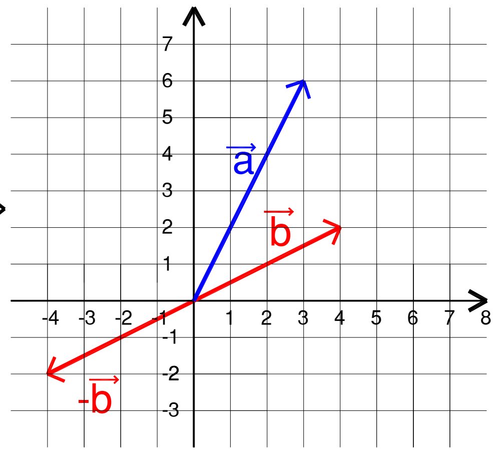
$$\vec{R} = 7i + 8j$$

In questo modo non c'è più bisogno di fare costruzioni grafiche ma si può operare solo algebricamente

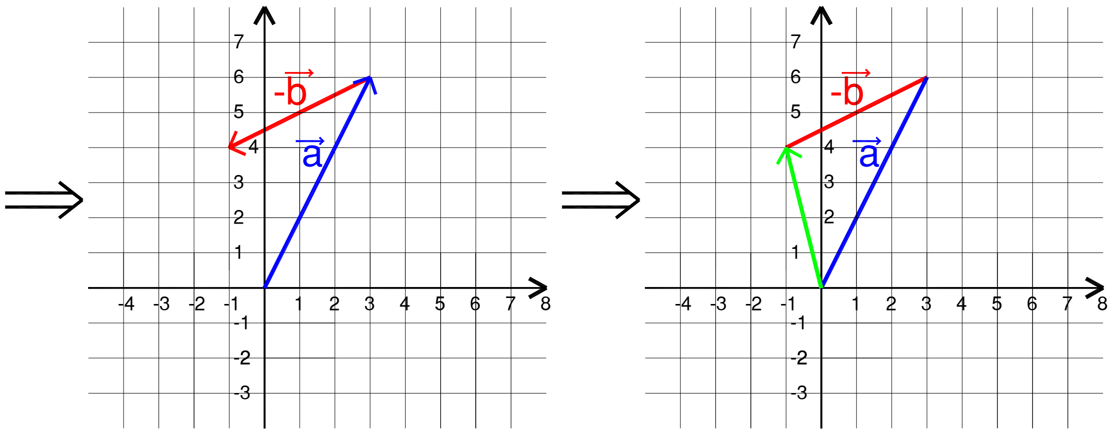
Posso anche calcolare la differenza tra $\vec{a} - \vec{b}$ senza fare tutta la procedura grafica con il vettore opposto



Vettori iniziali $\vec{a}$ e $\vec{b}$



Si calcola il vettore - $-\vec{b}$



Metodo grafico:
il vettore $-\vec{b}$ è trasportato sulla punta del vettore $\vec{a}$

Il lato che chiude il poligono è la risultante $\vec{R}$ (in verde)

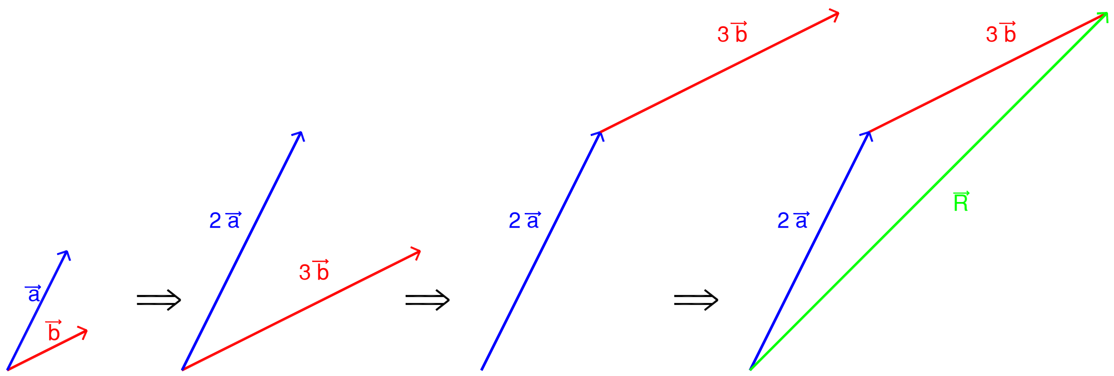
Ottengo leggendo sul grafico che la risultante vale $\vec{R} = -i + 4j$

Senza ricorrere alla procedura grafica il calcolo diventa molto più facile e rapido:

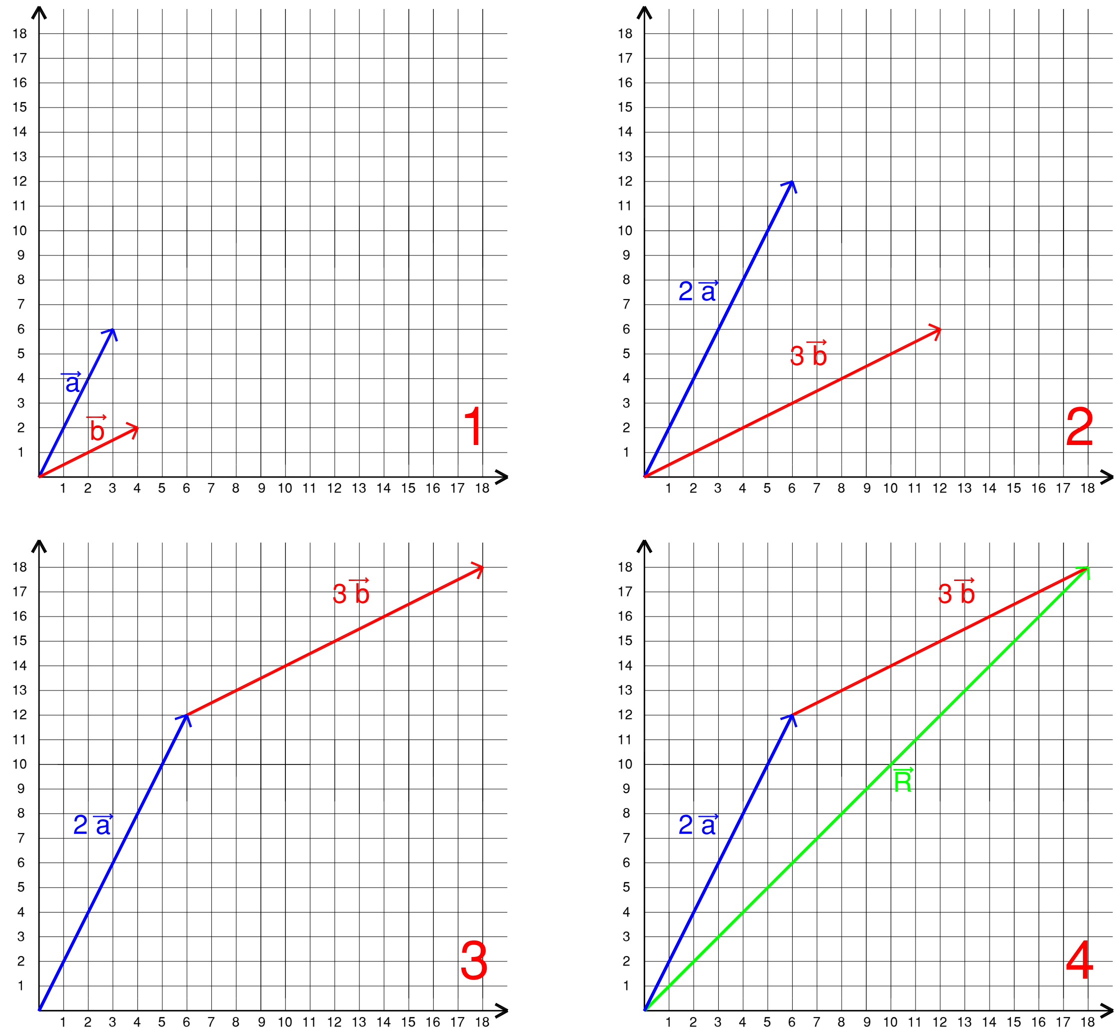
$$+\vec{a} = 3i + 6j$$
$$-\vec{b} = 4i + 2j$$
$$\overline{}$$
$$\vec{R} = -i + 4j$$

Inoltre si possono fare intere espressioni

Se deve essere calcolata l'espressione $2\vec{a} + 3\vec{b}$ col metodo grafico si deve fare innanzitutto il doppio di $\vec{a}$ e fare il triplo di $\vec{b}$ e poi sommare graficamente $2\vec{a}$ con $3\vec{b}$



E sul piano cartesiano in modo analogo



Da cui si ha leggendo sul grafico il risultato $\vec{R} = 18i + 18j$

Invece si può fare semplicemente e direttamente in questo modo

$$2\vec{a} = 2(3i + 6j) = 6i + 12j \quad \text{e} \quad 3\vec{b} = 3(4i + 2j) = 12i + 6j$$

da cui si ottiene

$$2\vec{a} = 6i + 12j$$

$$\underline{3\vec{b} = 12i + 6j}$$

$$\vec{R} = 18i + 18j$$

O ancora più RAPIDAMENTE:

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(3i + 6j) + 3(4i + 2j) = (2 \times 3 + 3 \times 4)i + (2 \times 6 + 3 \times 2)j =$$

$$= 18i + 18j$$

Si possono considerare anche le operazioni anche con tre o più vettori.

Aggiungendo un terzo vettore $\vec{c} = 2i + 3j$ eseguiamo l'operazione $3\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$.

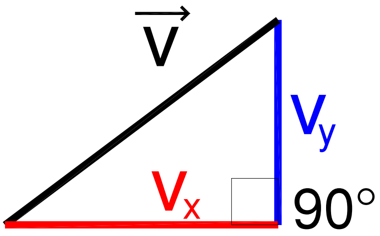
Si ha infatti:

$$3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}=3(3i+6j)-(4i+2j)+2(2i+3j)=(3\times3-1\times4+2\times2)i+$$
$$+(3\times6-1\times2+2\times3)j=9i+22j$$

Altro esempio:

$$4\vec{a}+5\vec{b}-3\vec{c}=4(3i+6j)+5(4i+2j)-3(2i+3j)=(4\times3+5\times4-3\times2)i+$$
$$+(4\times6+5\times2-3\times3)j=26i+25j$$

Ed infine quanto vale il modulo del vettore $\vec{v}$ di cui si conoscono le componenti cartesiane?
Ci viene in aiuto l'amico Pitagora perché il vettore e le sue componenti costituiscono un triangolo rettangolo in cui il modulo del vettore è l'ipotenusa pertanto.



$$|\vec{v}|=\sqrt{V_x^2+V_y^2}$$

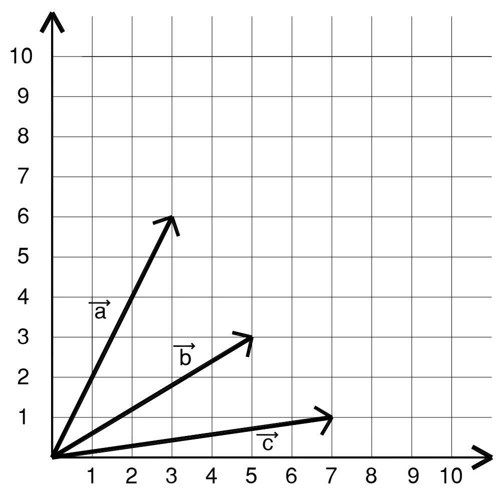
Per il vettore $\vec{v}=4i+3j$ si ha $|\vec{v}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

ESEMPIO SVOLTO

Con i vettori a lato eseguire le seguenti operazioni:

a) $\vec{a}+\vec{b}$
b) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
c) $\vec{a}-\vec{b}$
d) $2\vec{a}+3\vec{b}$
e) $4\vec{a}-\vec{c}$

e calcolare i moduli dei vettori risultanti.



Scriviamo i vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$

$\vec{v}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	Vettore
$\vec{a}$	3	6	$\vec{a} = 3i + 6j$
$\vec{b}$	5	3	$\vec{b} = 5i + 3j$
$\vec{c}$	7	1	$\vec{c} = 7i + j$

Risultati

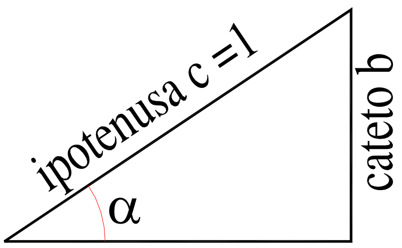
	Operazione	$\vec{i}$	$\vec{j}$	Soluzione	$\lvert\vec{R}\rvert$
a)	$\vec{a}+\vec{b}$	8	9	$\vec{R} = 8i + 9j$	$\sqrt{145} \cong 12{,}042$
b)	$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$	15	10	$\vec{R} = 15i + 10j$	$\sqrt{325} \cong 18{,}028$
c)	$\vec{a}-\vec{b}$	-2	3	$\vec{R} = -2i + 3j$	$\sqrt{13} \cong 3{,}606$
d)	$2\vec{a}+3\vec{b}$	21	21	$\vec{R} = 21i + 21j$	$\sqrt{882} \cong 26{,}698$
e)	$4\vec{a}-\vec{c}$	5	23	$\vec{R} = 5i + 23j$	$\sqrt{554} \cong 23{,}537$

Adesso affrontiamo due problemi ovvero:

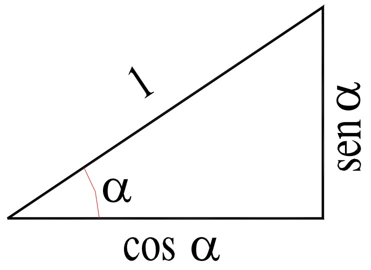
1) Se di un vettore si conoscono il modulo e l'angolo che fa con l'asse X quanto valgono le componenti cartesiane?
2) se si conoscono le componenti cartesiane di un vettore quanto vale l'angolo che fa il vettore con l'asse X?

Per questi due problemi si dovranno introdurre necessariamente le **funzioni goniometriche** che farete in modo completo <u>in matematica</u> al terzo anno.

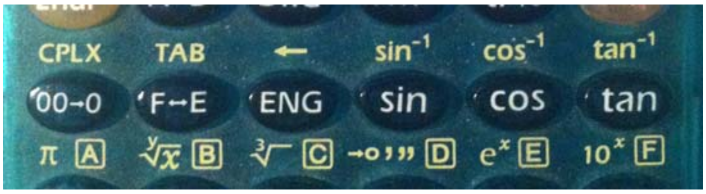
Si parte da un triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa misura 1



Se si conosce il valore dell'angolo α è possibile conoscere il valore del cateto a orizzontale e del cateto b verticale.
Infatti il cateto orizzontale si chiama **coseno** dell'angolo α scritto come **cos α** mentre il cateto si chiama **seno** dell'angolo α scritto come **sen α** (oppure **sin α** perchè in inglese il seno mantiene il nome latino di *sinus*)



Conoscendo il valore dell’angolo α tra l’ipotenusa e il cateto orizzontale e possibile calcolare il valore dei due cateti **con l’impiego della calcolatrice scientifica** (tranne per alcuni casi particolari detti angoli notevoli in cui se ne può fare a meno).
La calcolatrice presenta i tasti sin e cos per il calcolo del seno e del coseno.



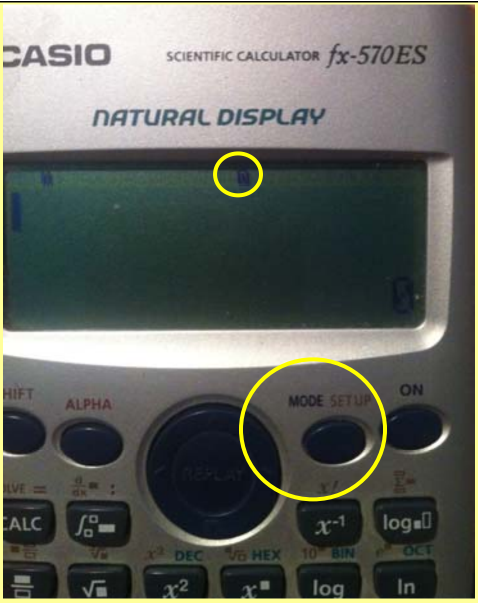
Per esempio:

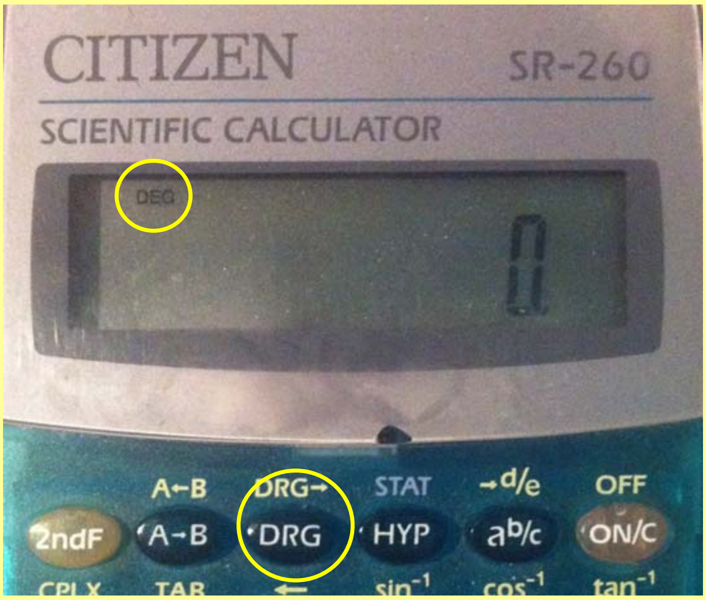
α=35°	cos 35°=0,8191520443……	e	sen 35°= 0,5735764364…….
α=143°	cos 143°=-0,79863551……	e	sen 143°= 0,6018150232……
α=232°	cos 232°=-0,6156614753…	e	sen 232°= -0,7880107536……

Il risultato numerico è un **numero compreso tra -1 e +1** e generalmente presenta una parte decimale illimitata.

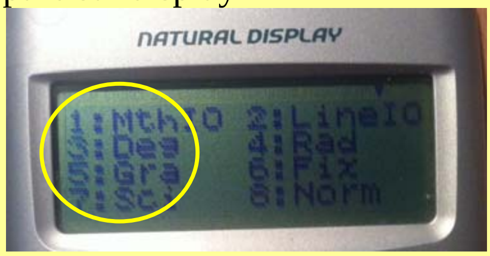
USO DELLA CALCOLATRICE

Ci sono tre modi di misurare gli angoli: voi conoscete per ora già dalle elementari solo quello con il grado sessagesimale. Nel triennio del liceo utilizzerete la misura in *radianti* mentre non utilizzerete mai (almeno a scuola) il terzo metodo di misura con il grado centesimale che ha un uso specialistico in particolare nella geomatica (perché la gestione numerica dell’angolo sessagesimale è complicata ed è più conveniente avere l’angolo retto diviso in 100 parti).
Qualsiasi calcolatrice ammette l’uso di tutti e tre i modi pertanto prima di procedere al calcolo del seno e del coseno occorre controllare il settaggio della calcolatrice. Sul display della calcolatrice deve apparire la lettera D o la scritta DEG (iniziale di *degrees* che sarebbe il grado sessagesimale in inglese).





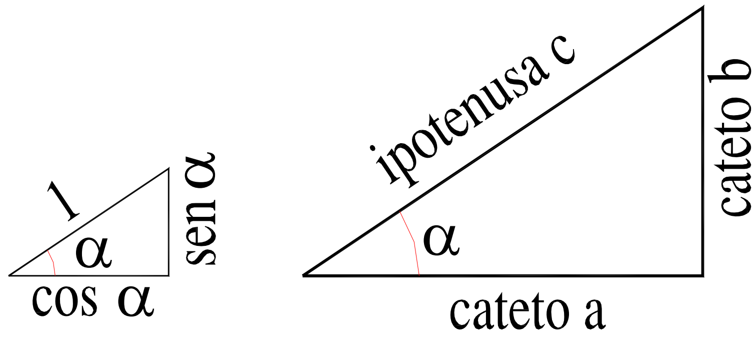
Se non compaiono la D o la scritta DEG ma R/RAD (per il radiante) o G/GRAD (per il Grado CENTESIMALE) occorre modificare l’unità di misura. Per questo alcuni calcolatrici hanno il tasto DRG che premuto modifica l’unità angolare: va premuto fino a far comparire D/DEG. In altre calcolatrici invece occorre premere il tasto MODE e scegliere l’opzione che compare sul display



Dopo aver verificato il settaggio dell’unità dell’angolo per calcolare il coseno e il seno basta premere il tasto cos ed inserire l’angolo in gradi e premere il tasto = o il tasto ENTER, in modo analogo per il seno si preme il tasto sin e si inserisce il valore dell’angolo.
Per altri calcolatrici (più scadenti) bisogna inserire prima il valore dell’angolo e poi premere il tasto della funzione goniometrica desiderata.

CONSIGLIO viste tutte queste differenze operative tra le calcolatrici fate pratica con la vostra calcolatrice su queste operazioni e in occasione di compiti in classe non vi fate prestare da altri la calcolatrice perché potrebbe funzionare in modo diverso dalla vostra e perdereste tempo per comprenderne il funzionamento o peggio sbagliare i risultati.

Come calcolare le misure dei cateti se l'ipotenusa non vale 1?



Basta una semplice proporzione

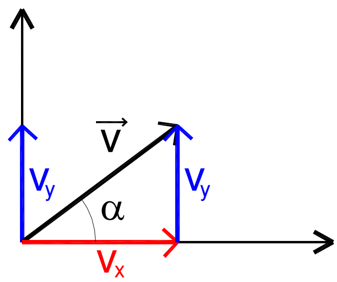
(Cateto a) : (Ipotenusa c) = (cos α):1

Applicando la proprietà della proporzione (prodotto dei medi = prodotto degli estremi) si trova: Cateto a= (Ipotenusa c) × (cos α)

Oppure in forma più compatta a = i × cos α

E per il cateto b verticale è possibile trovare invece b = i × sen α

Ora è possibile scrivere le componenti cartesiane di un vettore di cui è noto il modulo e l'angolo che forma con la direzione orizzontale X.
Infatti il vettore non è altro che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo



$$\vec{V} = V_x i + V_y j \quad \text{dove} \quad \begin{cases} V_x = V\cos\alpha \\ V_y = V\sin\alpha \end{cases} \quad \text{perciò} \quad \vec{V} = V\cos\alpha \cdot i + V\sin\alpha \cdot j$$

Esempio:

$$\vec{V} = \begin{cases} \left|\vec{V}\right| = 12 \\ \alpha = 35° \end{cases} \quad \text{risulta} \quad \begin{cases} V_x = V\cos\alpha = 12\cdot\cos 35° = 9{,}829824531 \\ V_y = V\sin\alpha = 12\cdot\sin 35° = 6{,}882917236 \end{cases}$$

Sui valori ottenuti occorrerà fare una approssimazione dettata dalle necessità del problema, se il vettore rappresenta uno spostamento in metri ci si può fermare alla seconda decimale che esprime i centimetri

$$\begin{cases} V_x \cong 9{,}83 \\ V_y \cong 6{,}88 \end{cases} \rightarrow \vec{V} = 9{,}83 i + 6{,}88 j$$

quindi non il risultato “esatto” con TUTTI i decimali ma approssimato quanto si vuole in base alle necessità del problema da risolvere

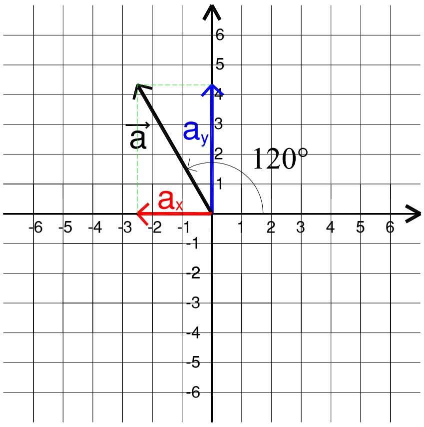
Operazioni tra vettori

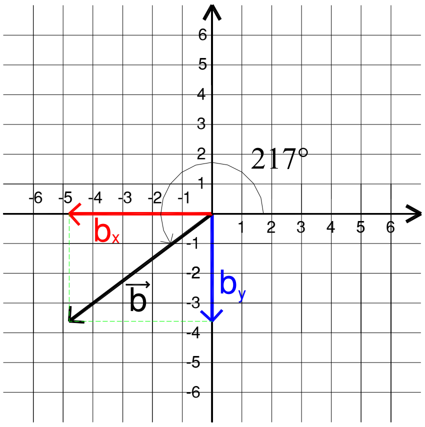
Esempio la somma tra due vettori $\vec{V} = \begin{cases} |\vec{V}| = 12 \\ \alpha = 35° \end{cases}$ e $\vec{W} = \begin{cases} |\vec{W}| = 16 \\ \alpha = 43° \end{cases}$

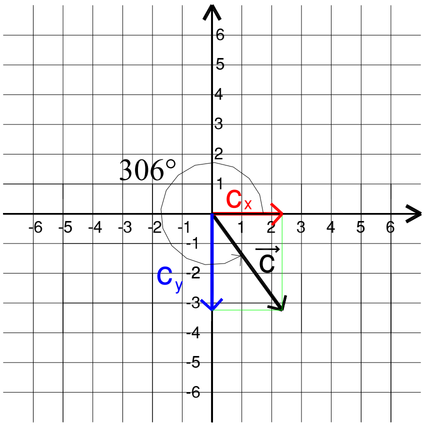
$$\vec{V} = 9{,}83i + 6{,}88j \quad \text{e} \quad \vec{W} = 11{,}70i + 10{,}91j$$

La somma vale $\vec{R} = \vec{V} + \vec{W} = 21{,}53i + 17{,}79j$ anche qui dunque non abbiamo il risultato “esatto” all’ultima cifra decimale ma con una “errore” che conosciamo (in questo caso di un centesimo) e che possiamo stabilire in base alle necessità del problema
INVECE con il metodo grafico non siamo in grado neanche di valutare l’entità dell’errore che commettiamo, sappiamo che non è corretto ma non possiamo conoscere l’entità massima dell’errore.

Consideriamo dei casi “complicati”







$|\vec{a}| = 5$ $|\vec{b}| = 6$ $|\vec{c}| = 4$

Nel vettore $\vec{a}$ la componente orizzontale a_x è negativa;

Nel vettore $\vec{b}$ sia la componente orizzontale b_x che quella verticale b_y sono negative;

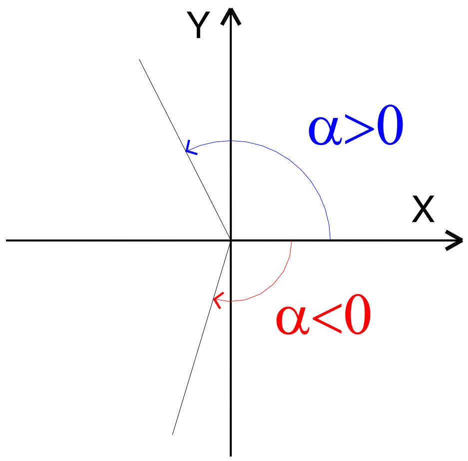
Nel vettore $\vec{c}$ la componente verticale c_y è negativa.

Come si devono trattare queste situazioni?

NON OCCORRE RAGIONARE SUL TRIANGOLO RETTANGOLO formato dal vettore ma BASTA APPLICARE DIRETTAMENTE le formule

$$\begin{cases} V_x = V\cos\alpha \\ V_y = V\sin\alpha \end{cases}$$

La cosa importante è che l’angolo sia misurato partendo dal semiasse positivo X e ORIENTATO ovvero valutato in SENSO ANTIORARIO. Convenzionalmente in matematica e fisica quest'angolo è considerato POSITIVO. Invece valutando in SENSO ORARIO l'angolo è NEGATIVO.



Applicando le formule si ha:

$$\vec{a} = 5 \cdot \cos(120°) \cdot i + 5 \cdot \sin(120°) \cdot j \rightarrow \vec{a} = -2{,}50i + 4{,}33j$$

$$\vec{b} = 6 \cdot \cos(217°) \cdot i + 6 \cdot \sin(217°) \cdot j \rightarrow \vec{b} = -4{,}79i - 3{,}61j$$

$$\vec{c} = 4 \cdot \cos(306°) \cdot i + 5 \cdot \sin(306°) \cdot j \rightarrow \vec{c} = +2{,}35i - 3{,}24j$$

(fermandoci alla seconda decimale)

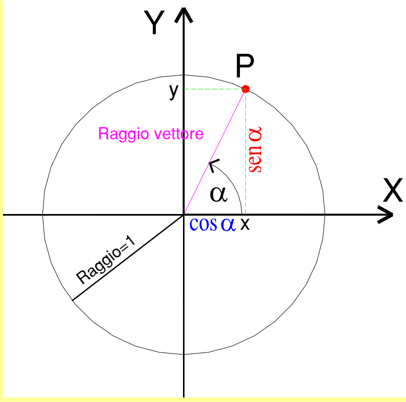
I risultati numerici ottenuti CONCORDANO con quanto osservato sul segno delle componenti cartesiane dei vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

Come mai questo "miracolo"?

(N.B.: la piena comprensione della parte seguente non è necessaria all'utilizzo delle funzioni goniometriche nel calcolo vettoriale.)

Per comprendere questo aspetto occorre conoscere la vera natura delle funzioni seno e coseno presentate prima semplicemente come "cateti" del triangolo rettangolo di ipotenusa uguale a 1.

Si parte da una circonferenza con raggio pari ad uno con il centro nell'origine degli assi X e Y (questa circonferenza è detta *circonferenza goniometrica*)
Si considera un raggio della circonferenza chiamato *raggio vettore* che forma un angolo α con la convenzione indicata prima. Il raggio vettore indica sulla circonferenza un punto P che ha ascissa *x* e ordinata *y*.

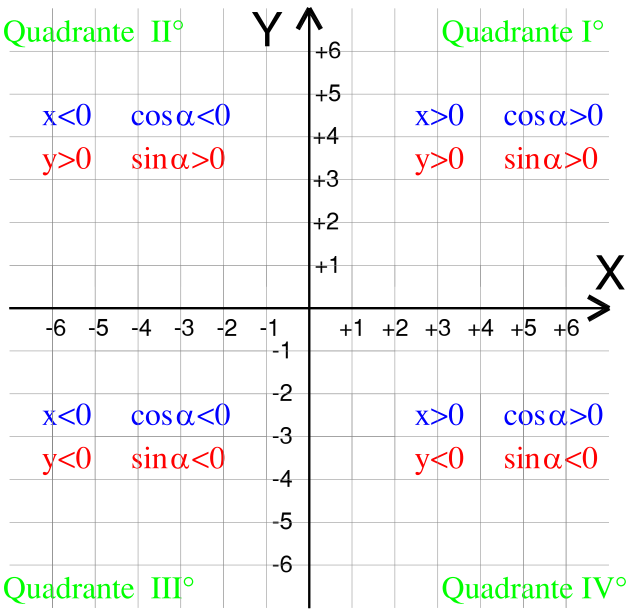


Per l'ascissa *x* e l'ordinata *y* del punto P si hanno le seguenti FONDAMENTALI relazioni

$$\begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$$

Ovvero le funzioni coseno e seno esprimono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata di un punto P sulla circonferenza al variare dell'angolo α

Ora i due assi cartesiani dividono il piano in quattro regioni che si chiamano *quadranti* (numerati in senso antiorario) dove ascissa e ordinata assumono segni diversi e di conseguenza anche il coseno e il seno



Per il punto P sulla circonferenza a seconda dell'arco in cui è divisa dagli assi cartesiani si ha allora la seguente situazione.

Posizione di P	Angolo α	Coseno	Seno
Quadrante I°	$0° < \alpha < 90°$	POSITIVO +	POSITIVO +
Quadrante II°	$90° < \alpha < 180°$	NEGATIVO -	POSITIVO +
Quadrante III°	$180° < \alpha < 270°$	NEGATIVO -	NEGATIVO -
Quadrante IV°	$270° < \alpha < 360°$	POSITIVO +	NEGATIVO -

Questo spiega perché applicare la formula

$$\vec{V} = V\cos\alpha \cdot i + V\sin\alpha \cdot j$$

porta immediatamente alla scrittura corretta del vettore in forma cartesiana (a patto di rispettare la convenzione per il calcolo dell'angolo α).

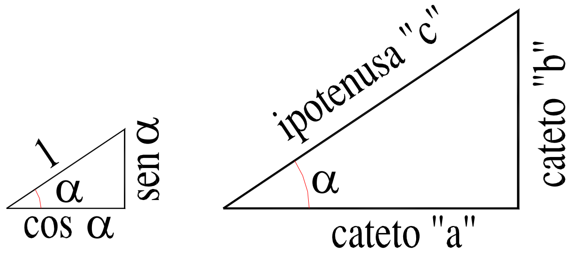
Rimane adesso il punto più difficile ovvero se sono note le componenti cartesiane di un vettore **quanto vale l'angolo che il vettore forma con l'asse x ?**
Questo è l'aspetto più complicato per la **particolarità** delle funzioni goniometriche

Dobbiamo introdurre la terza funzione goniometrica.
Partendo sempre dalle due relazioni ottenute per il triangolo rettangolo con le due relazioni:

$$a = c \cdot \cos\alpha$$

$$b = c \cdot \sin\alpha$$

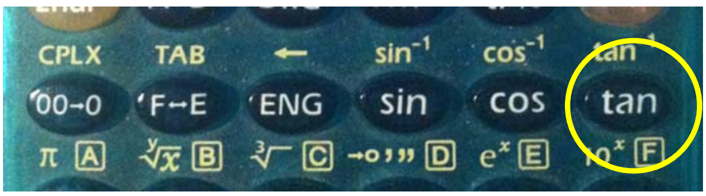
oppure in alternativa ragionando sui due triangoli



con la proporzione $\sin\alpha : \cos a = b : a$

è possibile ricavare questa relazione $$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a}$$

Il rapporto tra seno e coseno costituisce la terza funzione goniometrica "tangente" dell'angolo α scritta come **tan α** (a volte su alcuni testi si trova anche **tg α** o più raramente **tang α**)



In definitiva la definizione di tangente è $$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Per esempio:

α=35°	cos 35°=0,8191520443…	sen 35°= 0,5735764364…….	tan 35°=0,7002075382….
α=143°	cos 143°=-0,79863551…	sen 143°= 0,6018150232……	tan 143°=-0,7535540501…
α=232°	cos 232°=-0,6156614753..	sen 232°= -0,7880107536……	tan 232°=1.279941632…

Anche il segno che assume la tangente dipende dall'angolo α

Angolo α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$
$0° < \alpha < 90°$	POSITIVO +	POSITIVO +	POSITIVO +
$90° < \alpha < 180°$	NEGATIVO -	POSITIVO +	NEGATIVO -
$180° < \alpha < 270°$	NEGATIVO -	NEGATIVO -	POSITIVO +
$270° < \alpha < 360°$	POSITIVO +	NEGATIVO -	NEGATIVO -

Riprendendo in considerazione il triangolo rettangolo abbiamo l'importante relazione

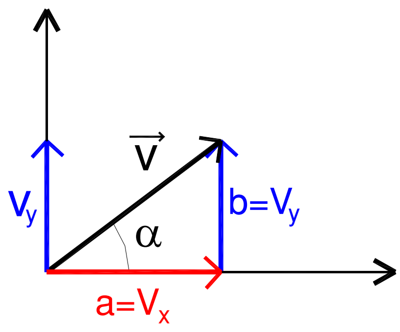
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{b}{a}$$

Per le applicazioni che incontrerete nel triennio vale la relazione (ricavata da quella sopra)

$$b = a \cdot \tan\alpha$$

ovvero un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.

Per quello che riguarda il calcolo vettoriale il cateto **a** orizzontale è la componente V_x mentre il cateto verticale **b** è la componente V_y



La relazione perciò diviene

$$\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x}$$

Ad esempio considerando il vettore $\vec{v} = 4i + 3j$ si ha

$$\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{3}{4} \text{ ovvero } \tan\alpha = 0{,}75$$

La $\tan\alpha = 0{,}75$ costituisce un problema diverso dal precedente. Infatti abbiamo calcolato il valore di una funzione goniometrica (seno e coseno) di un angolo, ora invece dobbiamo cercare l'angolo NOTO il valore della funzione goniometrica.
Ciò costituisce una EQUAZIONE GONIOMETRICA che si studia in terza classe ma possiamo già risolverle perché esiste una gruppo di funzioni che ci permette di trovare l'angolo quando **è noto il valore della funzione goniometrica**.

Queste funzioni sono le FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

La funzione che ci permette di risolvere il problema è l'*arcotangente* di x abbreviato con ***arctan x*** (oppure ***arctg x*** o a volte anche ***atn x***) dove x è il valore che assume la funzione goniometrica.

La formula da utilizzare per ottenere l'angolo è allora

$$\alpha = \arctan\frac{V_y}{V_x}$$

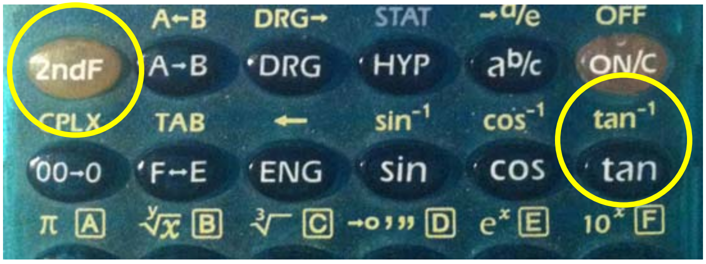
Quindi per l'esempio si deve calcolare $\alpha = \arctan\frac{3}{4} = \arctan(0{,}75)$

Sulla calcolatrici non esiste il tasto **arcotangente** ma in corrispondenza del tasto tan c'è la scritta $\tan^{-1}$ che indica (impropriamente) proprio la funzione arcotangente

Anche per il seno e il coseno esistono le funzioni inverse *arcoseno* e *arcocoseno* (abbreviate rispettivamente in ***arcsen x*** e ***arccos x***) mentre sulla calcolatrice sono presenti in corrispondenza dei tasti sin e cos le diciture $\sin^{-1}$ e $\cos^{-1}$)

Come si fa a utilizzare le funzioni inverse?
Bisogna attivarle premendo nella maggior parte calcolatrici il tasto Seconda Funzione (2ndF nella foto sotto), in altre occorre premere il tasto SHIFT o altri tasti con indicazioni diverse (cambia da modello a modello)

Quindi
Tasto 2ndF – Tasto Tan –valore numerici- Tasto = o Enter
(Attenzione nelle calcolatrici scadenti va prima inserito il valore numerico)



Nell'esempio $\alpha = \arctan(0{,}75)$ procedendo come indicato si ottiene sul display

$$\tan^{-1}(0{,}75)$$

Premendo il tasto invio o enter appare il valore

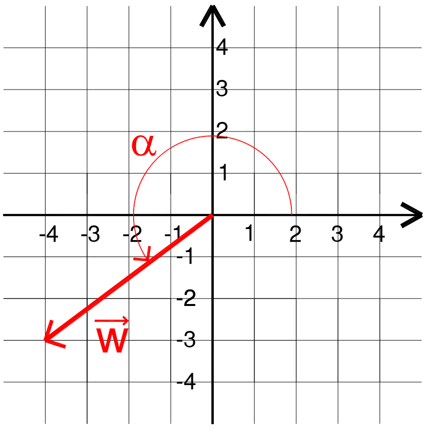
36,86989765

Questo risultato si legge 36 gradi (sessagesimali) e **86 centesimi di grado** (NON 86 primi!!!)
Per ottenere la misura in gradi minuti secondi occorre premere un altro tasto che in alcune calcolatrici è ° ’ ” in altre DMS

Alla fine si ottiene il valore dell’angolo: α=36° 52’ 12”

Finito?
Assolutamente NO. Anzi se pensavate che finora era difficile adesso arriva il peggio!

Consideriamo il vettore $\vec{w} = -4i - 3j$



Applicando la formula $\alpha = \arctan\dfrac{w_y}{w_x} = \arctan\dfrac{-3}{-4} = \arctan(0{,}75)$

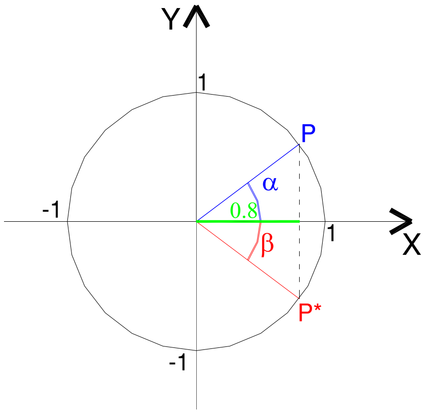
di nuovo si ottiene α=36° 52’ 12”

C’è qualcosa che non quadra!!!!
Il vettore $\vec{W}$ forma chiaramente un angolo maggiore di 180° con il semiasse positivo delle x ma la calcolatrice dice altro.

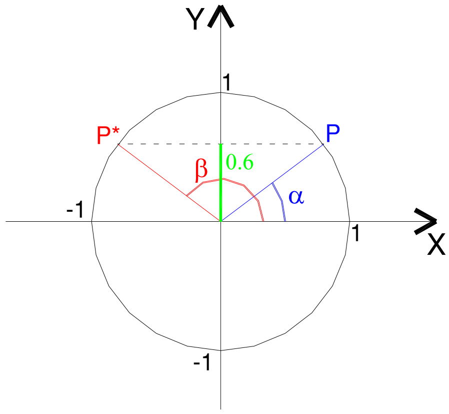
Cosa è successo? Un malfunzionamento della calcolatrice?

Tutto è dovuto alla particolarità delle funzioni inverse *arcoseno*, *arcocoseno* e *arcotangent*e. Per dei motivi che vi saranno chiariti in seguito queste funzioni sono **VINCOLATE** a dare come risultato valori che rientrano in un intervallo ben preciso detto CODOMINIO

Prendiamo in esame le situazioni in figura dove viene ripresa la circonferenza goniometrica di raggio uno dove il coseno e il seno sono rispettivamente l’ascissa e l’ordinata di un punto P sulla circonferenza.



Il punto P e il punto P* hanno la stessa ascissa quindi lo stesso coseno ma risolvendo arccos (0,8) si ottiene solo il primo angolo α= 36°52'11" ma non il secondo angolo β



Il punto P e il punto P* hanno la stessa ordinata quindi lo stesso seno ma risolvendo arcsen (0,6) si ottiene solo il primo angolo α= 36°52'11" ma non il secondo angolo β

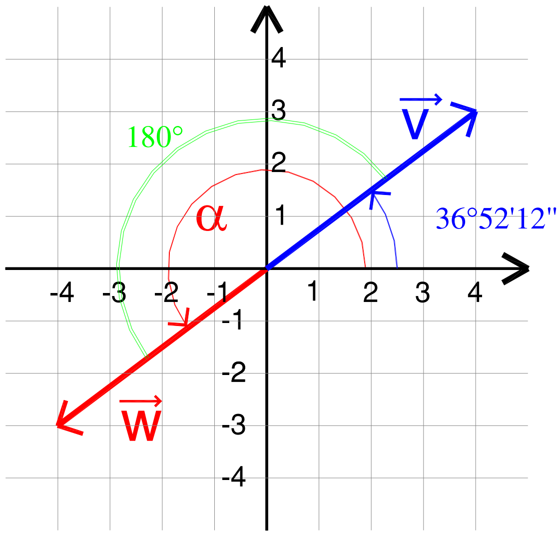
Quali sono codomini allora per le tre funzioni inverse?

Funzione inversa	Codominio In gradi sessagesimali	Se x >0	Se x<0
Arcsen x	$-90° < \alpha < 90°$	$0° < \alpha < 90°$	$-90° < \alpha < 0°$
Arccos x	$0° < \alpha < 180°$	$0° < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$
Arctan x	$-90° < \alpha < 90°$	$0° < \alpha < 90°$	$-90° < \alpha < 0°$

Infine troviamo l'angolo che il vettore $\vec{w} = -4i - 3j$ forma con l'asse x.

Riconsideriamo anche il vettore $\vec{v} = +4i + 3j$ che forma con l'asse x l'angolo α=36° 52' 12" . Poiché i valori delle loro componenti sono opposte (4 e -4, 3 e -3) i due vettori $\vec{w}$ e $\vec{v}$ sono OPPOSTI

Questo è evidente riportando sullo stesso grafico i due vettori.

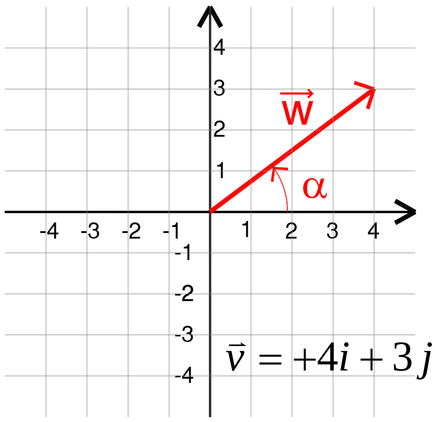
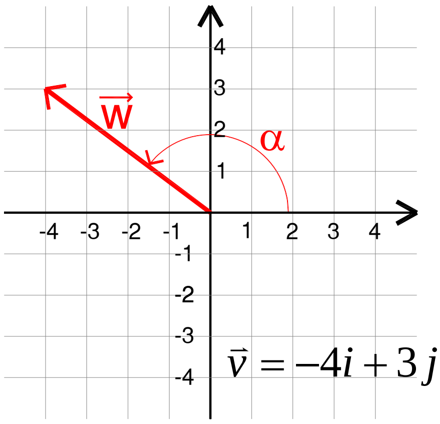
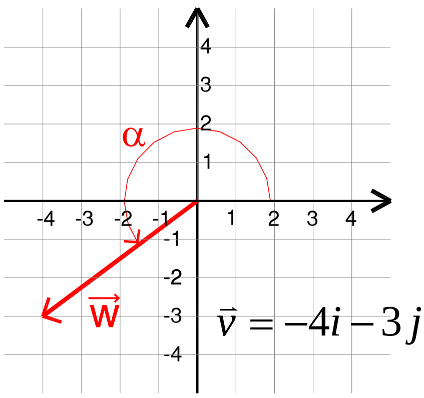
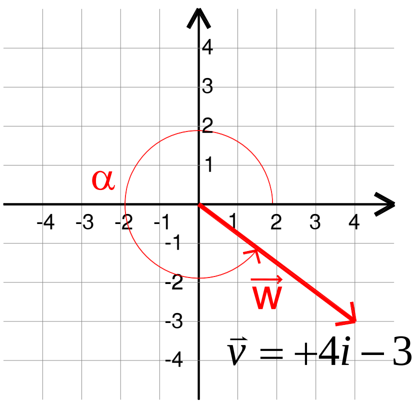


Pertanto l'angolo che il vettore $\vec{w}$ forma con l'asse x si ottiene sommando 180° all'angolo che il vettore $\vec{v}$ forma con l'asse x

α=36° 52' 12" + 180°=216° 52' 12"

Sommare 180° al valore ottenuto con la funzione inversa è la regola generale per angoli α del secondo e terzo quadrante.

In definitiva si possono presentare SOLO i 4 casi mostrati nella seguente tabella

SCHEMA OPERATIVO CON ESEMPI NUMERICI						
CASO		V_x	V_y	α e QUADRANTE	Risultato $\arctan\frac{V_y}{V_x}$	Azione da compiere
1	 $\vec{v} = +4i + 3j$	+	+	$0° < \alpha < 90°$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ I°	+36° 52' 12"	**NULLA** α=+36° 52' 12"
2	 $\vec{v} = -4i + 3j$	-	+	$90° < \alpha < 180°$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ II°	-36° 52' 12"	**Sommare 180°** α=+143° 7' 48"
3	 $\vec{v} = -4i - 3j$	-	-	$180° < \alpha < 270°$ $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ III°	+36° 52' 12"	**Sommare 180°** α=+216° 52' 12"
4	 $\vec{v} = +4i - 3j$	+	-	$270° < \alpha < 360°$ $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ IV°	-36° 52' 12"	**NULLA** α= -36° 52' 12" **Oppure per non avere l'angolo negativo sommare 360°** α=+323° 7' 48"

FORMULARIO	
Elementi noti	Elementi da determinare
Modulo V ed angolo α del vettore $\vec{v}$	Componenti cartesiane $\begin{cases} V_x = V\cos\alpha \\ V_y = V\sin\alpha \end{cases}$
Vettore in forma cartesiana $\vec{V} = V_x i + V_y j$	Modulo $\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ ed angolo α $\alpha = \arctan\frac{V_y}{V_x}$

ESEMPI

	Vettore $\vec{v}$	Modulo $\lvert\vec{v}\rvert$	Angolo di $\vec{v}$
a)	$\vec{v} = +8i + 5j$	$\sqrt{89} = 9{,}434$	32° 0' 19"
b)	$\vec{v} = -12i + 10j$	$\sqrt{244} \cong 15{,}620$	140° 11' 40"
c)	$\vec{v} = -2i - 7j$	$\sqrt{53} \cong 7{,}280$	254° 3' 17"
d)	$\vec{v} = +5i - 12j$	$\sqrt{169} = 13$	-67° 22' 49" *oppure* 292° 37' 12"

Rimane da vedere l'operazione di prodotto tra vettori che verrà utilizzata nel triennio.