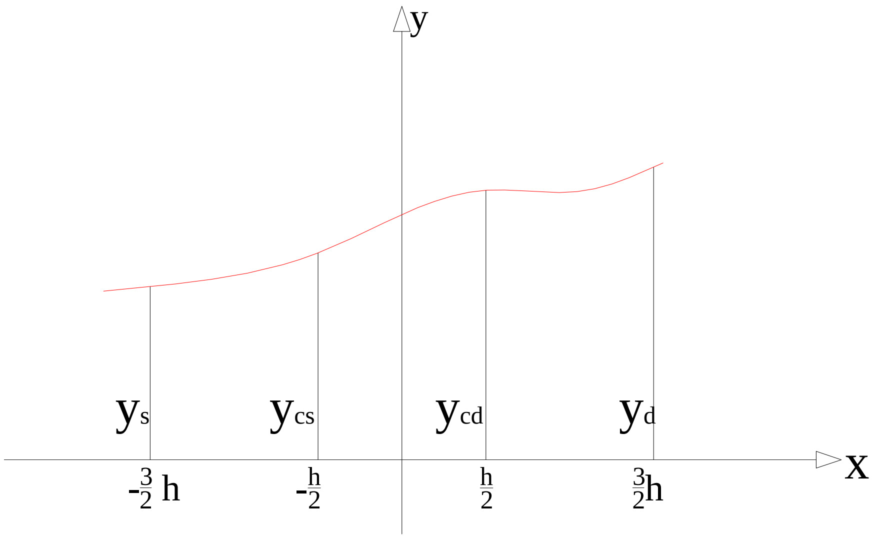
INTEGRAZIONE PER VIA NUMERICA

con funzione cubica interpolante



$h=\dfrac{b-a}{3n}$ …l’intervallo [a;b] è diviso in un numero di intervalli multiplo di tre

$$\text{Area} = \int_{-\frac{3}{2}h}^{\frac{3}{2}h}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)dx = \left|\frac{a}{4}x^4+\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx\right|_{-\frac{3}{2}h}^{\frac{3}{2}h}$$

$$=\frac{27}{32}ah^4+\frac{9}{8}bh^3+\frac{9}{8}ch^2+\frac{3}{2}dh-\left(\frac{27}{32}ah^4-\frac{9}{8}bh^3+\frac{9}{8}ch^2-\frac{3}{2}dh\right)=$$

$$A=\frac{9}{4}h^3b+3hd \quad (1)$$

è necessario calcolare soltanto b e d nel seguente sistema

$$\begin{cases} y_s=-\dfrac{27}{8}ah^3+\dfrac{9}{4}bh^2-\dfrac{3}{2}ch+d \\ y_{cs}=-\dfrac{1}{8}ah^3+\dfrac{1}{4}bh^2-\dfrac{1}{2}ch+d \\ y_{cd}=\dfrac{1}{8}ah^3+\dfrac{1}{4}bh^2+\dfrac{1}{2}ch+d \\ y_d=\dfrac{27}{8}ah^3+\dfrac{9}{4}bh^2+\dfrac{3}{2}ch+d \end{cases}$$

Risoluzione del sistema con il “metodo del comporre”

$$y_{cd}+y_{cs}=\frac{b}{2}h^2+2d$$

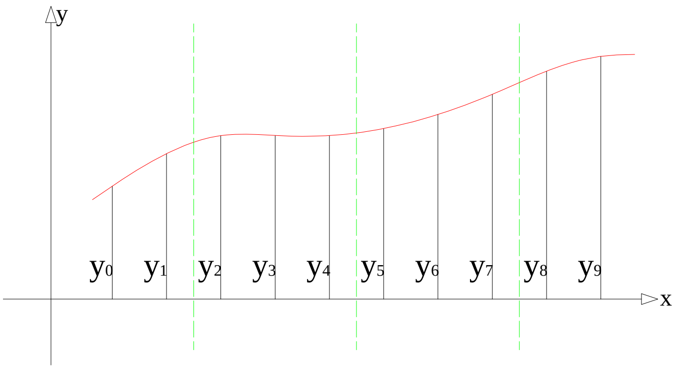
$$y_d+y_s=\frac{9}{2}h^2b+2d$$

soluzione del sistema

$$b = \frac{y_d + y_s - y_{cs} - y_{cd}}{4h^2} \qquad \text{e} \qquad d = \frac{9\,y_{cd} + 9\,y_{cs} - y_d - y_s}{16}$$

Sostituendo b e d nella (1)

$$A = \frac{h}{8}\left(3y_d + 3y_s + 9y_{cs} + 9y_{cd}\right)$$



$$A_{(0\to 3)} = \frac{h}{8}\left(3y_0 + 3\,y_3 + 9y_1 + 9\,y_2\right)$$

$$A_{(3\to 6)} = \frac{h}{8}\left(3y_3 + 3\,y_6 + 9y_4 + 9\,y_5\right)$$

$$A_{(6\to 9)} = \frac{h}{8}\left(3y_6 + 3\,y_9 + 9y_7 + 9\,y_8\right)$$

Generalizzazione della formula

$$\text{Area} = \frac{b-a}{3n}\,\frac{1}{8}\,\left[3(y_0 + y_n) + 6\,(y_3 + y_6 + y_9 + y_{12}\ldots) + 9(\,y_1 + y_2 + y_4 + y_5\ldots)\right] \qquad (2)$$

Indici multipli di tre

Condizione necessaria affinché la formula possa essere applicata è che l'intervallo [a;b] sia diviso in un numero di intervalli multiplo di tre.

Esempio applicativo

L'esempio è svolto in riferimento ad un integrale indefinito noto al fine di verificare la validità della formula (2)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \left|\ln|x|\right|_1^2 = \ln 2 = 0{,}693147181$$

Utilizzando h= $\frac{b-a}{3n}$ con n = 3 $\Rightarrow$ h= $\frac{1}{9}$

x	y	
1	1	y_0
$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{10}$	y_1
$\frac{11}{9}$	$\frac{9}{11}$	y_2
$\frac{12}{9}$	$\frac{9}{12}$	y_3
$\frac{13}{9}$	$\frac{9}{13}$	y_4
$\frac{14}{9}$	$\frac{9}{14}$	y_5
$\frac{15}{9}$	$\frac{9}{15}$	y_6
$\frac{16}{9}$	$\frac{9}{16}$	y_7
$\frac{17}{9}$	$\frac{9}{17}$	y_8
2	$\frac{1}{2}$	y_n

Area= $\frac{b-a}{3n}\,\frac{1}{8}\,[3(y_0+y_9)+6(y_3+y_6)+9(y_1+y_2+y_4+y_5+y_7+y_8]$ =0,693157302

Autore : Pietro Di Marino classe 5B P.N.I. 2008/2009
Grafici : Francesco D'Ambrosio 5B P.N.I. 2008/2009
Supervisione : Prof. Mauro D'Ettorre