1

Integrazione delle funzioni razionali in una variabile

1.1. INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI.

Data la funzione razionale $N(x)/D(x)$, con $N(x)$ e $D(x)$ polinomi in x tali che $D(x)$ non si annulli per nessun valore di x dell'intervallo $[\alpha, \beta]$, consideriamo l'integrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{N(x)}{D(x)}\, dx. \tag{1.1}$$

Se

$$N(x) = D(x)\, Q(x) + R(x),$$

con $Q(x)$ ed $R(x)$ polinomi in x, ed il grado di $R(x)$ è minore del grado di $D(x)$, si ha

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

e quindi

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{N(x)}{D(x)}\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x)\, dx + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(x)}{D(x)}\, dx.$$

Il primo dei due integrali del secondo membro è facilmente calcolabile, in quanto $Q(x)$ è un polinomio; occupiamoci perciò del secondo, nel quale la funzione integranda è una funzione razionale con il numeratore di grado minore del grado del denominatore.

A tale scopo ricordiamo che, nel più generale dei casi, il polinomio $D(x)$ può dar luogo ad una scomposizione in fattori del tipo

$$D(x) = d_0 (x-\alpha_1)^{m_1} (x-\alpha_2)^{m_2} (x-\alpha_3)^{m_3} \dots (x-\alpha_n)^{m_n} \cdot$$

$$\cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot$$

$$\cdot (x^2 + p_s x + q_s)^{r_s}, (*)$$

in cui il numero $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n + 2r_1 + 2r_2 + \ldots + 2r_s$ è uguale al grado di $D(x)$ e d_0 è una costante.

D'altra parte si dimostra che è possibile trovare delle costanti A_i, B_i, C_i, . . . tali che sia

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \tag{1.2}$$

$$+ \frac{B_1}{x-\alpha_2} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{B_{m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}} +$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot +$$

$$+ \frac{C_1}{x-\alpha_n} + \frac{C_2}{(x-\alpha_n)^2} + \ldots + \frac{C_{m_n}}{(x-\alpha_n)^{m_n}} +$$

$$+ \frac{D_1 x + E_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{D_2 x + E_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{D_{r_1} x + E_{r_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{r_1}} +$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot +$$

$$+ \frac{F_1 x + G_1}{x^2 + p_s x + q_s} + \frac{F_2 x + G_2}{(x^2 + p_s x + q_s)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{F_r x + G_r}{(x^2 + p_s x + q_s)^{r_s}}.$$

Il calcolo di tali costanti si effettua nel modo seguente: si riduce il secondo membro della (1.2) ad un'unica frazione; si libera l'uguaglianza dai denominatori; infine, si applica il principio di identità di due polinomi in una qualsiasi delle due forme sotto cui, solitamente, viene enunciato. Ne derivano i due seguenti metodi:

– si uguagliano i coefficienti dei termini di ugual grado dei due membri dell'uguaglianza, e si risolve il sistema che così si ottiene;

(*) E' evidente che i fattori di secondo grado sono a radici non reali altrimenti si sarebbero potuti scomporre.

– si attribuiscono all'indeterminata valori arbitrari (uno in più del grado massimo dei termini che compaiono nell'uguaglianza) e si risolve il sistema ottenuto.

In particolare può risultare conveniente, una volta determinata una costante, sostituirla e semplificare l'uguaglianza trasformata che si ricava.

Da quanto precede, l'integrale dato, in base alla (1.2), è stato ricondotto al calcolo di integrali dei seguenti quattro tipi:

$$\int_a^\beta \frac{a}{x-\alpha_1}\,dx; \tag{1.3}$$

$$\int_a^\beta \frac{a}{(x-\alpha_1)^m}\,dx; \tag{1.4}$$

$$\int_a^\beta \frac{bx+c}{x^2+px+q}\,dx; \tag{1.5}$$

$$\int_a^\beta \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m}\,dx. \tag{1.6}$$

Per l'integrale (1.3) si ha subito

$$\int_a^\beta \frac{a}{x-\alpha_1}\,dx = a[\log|x-\alpha_1|]_a^\beta,$$

quindi: *se al denominatore della funzione integranda c'è un fattore binomio semplice, nell'integrale figura il logaritmo di tale fattore.*

Per l'integrale (1.4) si ha:

$$\int_a^\beta \frac{a}{(x-\alpha_1)^m}\,dx = a\left[\frac{(x-\alpha_1)^{-m+1}}{-m+1}\right]_a^\beta =$$

$$= \frac{a}{1-m}\left[\frac{1}{(x-\alpha_1)^{m-1}}\right]_a^\beta;$$

quindi: *se al denominatore della funzione integranda c'è un fattore binomio multiplo, nell'integrale figura una funzione avente al denominatore questo fattore con l'esponente diminuito di un'unità.*

Consideriamo l'integrale (1.5). Si ha

$$\int_\alpha^\beta \frac{bx+c}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{b}{2}\int_\alpha^\beta \frac{2x+p+\dfrac{2c}{b}-p}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{b}{2}\,[\log|x^2+px+q|\,]_\alpha^\beta + \left(c-\frac{bp}{2}\right)\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x^2+px+q},$$

e, per l'integrale presente nell'ultimo membro,

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x^2+px+q} = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{x^2+px+\dfrac{p^2}{4}-\dfrac{p^2}{4}+q} =$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2}\int_\alpha^\beta \frac{dx}{1+\left(\dfrac{x+p/2}{\sqrt{4q-p^2}/2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\cdot\left[arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right]_\alpha^\beta =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\left[arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right]_\alpha^\beta .$$

In definitiva si può scrivere:

$$\int_\alpha^\beta \frac{bx+c}{x^2+px+q}\,dx = \frac{b}{2}\,[\log|x^2+px+q|\,]_\alpha^\beta +$$

$$+\left(c-\frac{bp}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\left[arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right]_\alpha^\beta ,$$

quindi: *se al denominatore della funzione integranda c'è un trinomio non decomponibile, nell'integrale figura il logaritmo del trinomio e l'arcotangente del rapporto tra la derivata del trinomio e la radice quadrata del suo discriminante cambiato di segno.*

Consideriamo l'integrale (1.6). Si ha:

$$\int_\alpha^\beta \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{b}{2}\int_\alpha^\beta \frac{2x+\dfrac{2c}{b}}{(x^2+px+q)^m}\,dx =$$

$$= \frac{b}{2}\int_\alpha^\beta \frac{2x+p+\dfrac{2c}{b}-p}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{b}{2}\int_\alpha^\beta \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,dx +$$

$$+\frac{b}{2}\left(\frac{2c}{b}-p\right)\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{b}{2(1-m)}\left[\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}}\right]_\alpha^\beta +$$

$$+\left(c-\frac{pb}{2}\right)\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} .$$

L'integrale presente nell'ultimo membro si può scrivere

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\left[\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\left(\dfrac{4q-p^2}{4}\right)\right]^m},$$

da cui, ponendo

$$x+\frac{p}{2}=z, \qquad \frac{4q-p^2}{4}=l^2,$$

segue

$$\int_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} \frac{dz}{(z^2+l^2)^m} = \frac{1}{l^2}\int_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} \frac{z^2+l^2-z^2}{(z^2+l^2)^m}\,dz =$$

$$= \frac{1}{l^2}\int_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} \frac{1}{(z^2+l^2)^{m-1}}\,dz - \frac{1}{l^2}\int_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} \frac{z^2}{(z^2+l^2)^m}\,dz.$$

L'integrale scritto per ultimo si può integrare per parti:

$$\int_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} z\,\frac{z}{(z^2+l^2)^m}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left[z \ \frac{(z^2+l^2)^{1-m}}{1-m} \right]_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} - \frac{1}{2}\int_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} \frac{(z^2+l^2)^{1-m}}{1-m}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2(1-m)}\left[\frac{z}{(z^2+l^2)^{m-1}} \right]_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} -$$

$$- \frac{1}{2(1-m)}\int_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} \frac{dz}{(z^2+l^2)^{m-1}},$$

quindi risulta

$$I_m = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \int_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} \frac{dz}{(z^2+l^2)^m} =$$

$$= \frac{1}{l^2}\int_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} \frac{dz}{(z^2+l^2)^{m-1}} - \frac{1}{2l^2(1-m)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{z}{(z^2+l^2)^{m-1}} \right]_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} + \frac{1}{2l^2(1-m)}\int_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} \frac{dz}{(z^2+l^2)^{m-1}} =$$

$$= \frac{1}{2l^2(m-1)}\left[\frac{z}{(z^2+l^2)^{m-1}} \right]_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} +$$

$$+ \frac{3-2m}{2l^2(1-m)}\int_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} \frac{dz}{(z^2+l^2)^{m-1}}.$$

Si è così ottenuta la formula ricorrente

$$I_m = \frac{1}{2l^2(m-1)}\left[\frac{z}{(z^2+l^2)^{m-1}} \right]_{\alpha+p/2}^{\beta+p/2} + \frac{3-2m}{2l^2(1-m)} I_{m-1}$$

che, applicata ripetutamente, permette il calcolo dell'integrale (1.6). Quindi: *se al denominatore della funzione integranda c'è un fattore trinomio multiplo, non decomponibile, nell'integrale figura una funzione con al denominatore il trinomio elevato all'esponente diminuito di una unità e, in più, i due termini del tipo precedente.*

Tenuto conto dei quattro tipi di integrali risolti, nella pratica si può procedere nel modo seguente:

a) si scrive

(1.7) $\displaystyle\int \frac{N(x)}{D(x)}dx =$ (un polinomio di grado uguale alla differenza dei gradi di $N(x)$ e $D(x)$ aumentato di "uno") +
+ (una frazione avente al denominatore il prodotto di tutti i fattori di $D(x)$, ognuno con l'esponente diminuito di "una" unità, ed avente per numeratore un polinomio di grado minore del grado complessivo del denominatore) +
+ (il logaritmo di ogni fattore binomio) +
+ (il logaritmo di ogni fattore trinomio) +
+ (l'arcotangente del rapporto tra la derivata del trinomio e la radice quadrata del suo discriminante cambiato di segno per ogni fattore trinomio);

b) si scrive l'identità

(1.8) $\displaystyle\frac{N(x)}{D(x)} =$ [derivata del secondo membro della (1.7)];

c) si ricavano i valori delle costanti che figurano al secondo membro della (1.8).

Il metodo di cui si è ora detto è, a volte, indicato come *metodo di Levi* (*).

1.2. METODO DI HERMITE PER L'INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI.

Se una funzione razionale $R(x)/D(x)$ ha il numeratore di grado inferiore al grado del denominatore e se

$$D(x) = d_0(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}(x-\alpha_3)^{m_3}\cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot (x-\alpha_n)^{m_n}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1}(x^2+p_2x+q_2)^{r_2}\cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot (x^2+p_sx+q_s)^{r_s},$$

(*) Nella trattazione e in molti esercizi gli estremi di integrazione sono stati lasciati indicati con α e β. Volendo fare dei casi particolari si sostituiranno ad α e β dei valori, tali però che l'intervallo $[\alpha, \beta]$ sia finito e che la funzione integranda sia limitata in $[\alpha, \beta]$.