RICERCA NUMERICA DELLE RADICI DI UNA EQUAZIONE

Nelle applicazioni pratiche è assolutamente necessario trovare gli zeri di equazioni anche non *risolubili elementarmente* sia di tipo polinomiale che di tipo trascendente. Tuttavia nelle applicazioni pratiche non occorre trovare una soluzione esatta ma risulta più che soddisfacente trovare una soluzione numerica sufficientemente approssimata.

Come è noto una equazione può essere interpretata come l'intersezione di una curva con l'asse delle x:

$$f(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

perciò la ricerca delle soluzioni delle equazioni equivale alla ricerca delle ascisse delle intersezioni delle curve con l'asse x. Ciò è permesso dal seguente teorema di esistenza degli zeri:

*"in un intervallo [a,b] se la funzione y=f(x) è continua e se risulta f(a)*f(b)<0 esisterà almeno un punto in cui la funzione si annulla"*

Il numero esatto di soluzioni **reali** di una equazione non è a priori determinabile ma comunque nelle applicazioni pratiche in generale è possibile conoscere gli intervalli dei valori accettabili: questo fatto è importante perché per l'applicazione dei metodi numerici è necessario studiare preliminarmente in modo qualitativo nell'intervallo richiesto la funzione almeno per accertarsi dell'esistenza di discontinuità o eliminare radici indesiderate (per esempio valori negativi o altri valori logicamente inaccettabili).

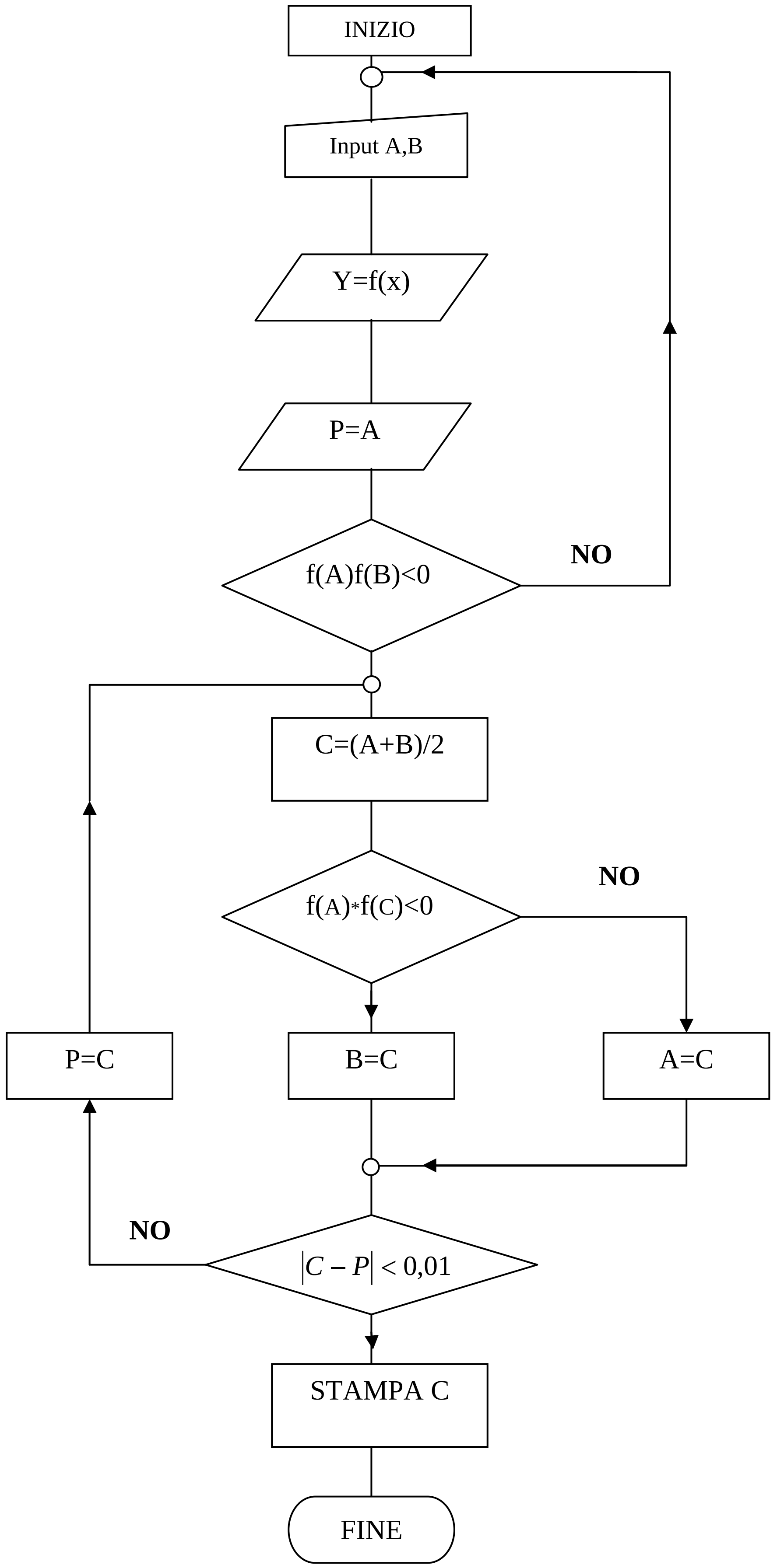
I metodi numerici adoperati sono iterativi ossia un calcolo viene ripetuto fino a quando non viene raggiunta una condizione prefissata. Un primo metodo molto intuitivo è quello di

BISEZIONE o DICOTOMICO

In questo metodo individuato un intervallo [a,b] per cui sussiste il teorema degli zeri si considera il valore di ascissa c=(a+b)/2 e si calcola f(c). Il successivo intervallo da prendere in considerazione tra [a,c] e [c,b] sarà scelto in base ancora al teorema degli esistenza degli zeri.
Il procedimento si esaurisce quando i valori calcolati per la f(x) negli estremi degli intervalli $[a_j,b_j]$ si approssimano allo zero. La ricerca della soluzione con questo metodo risulta molto rapida ma grossolana in quanto per ottenere valori precisi occorre fare una gran mole di calcoli.

Una **grande controindicazione** di questo metodo inoltre è che nel *calcolo manuale* è facile commettere errori e trattando con piccole quantità è frequente sbagliare il segno di f(x) in uno dei due estremi dell'intervallo $[a_j,b_j]$ e di conseguenza la scelta del successivo intervallo di applicazione.
Ovviamente il problema è superato facendo eseguire i calcoli ad un pc o ad una calcolatrice programmabile.

DIAGRAMMA DI FLUSSO METODO DI BISEZIONE

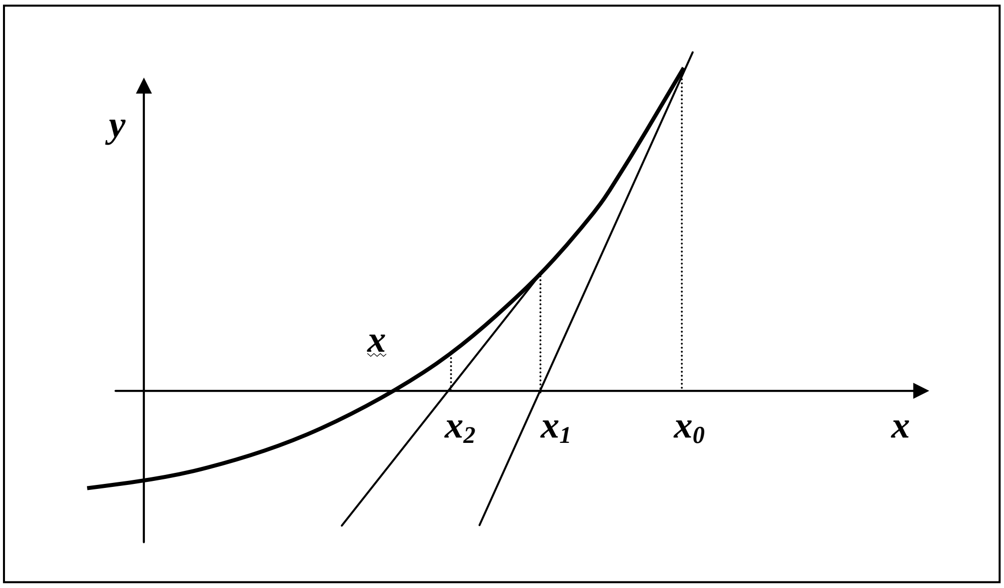


Dove P è una variabile di scambio che contiene il precedente valore di c.

Altro metodo usato è il **METODO DELLE TANGENTI (o NEWTON-FOURIER)**

Con questo metodo è possibile eliminare il problema dell'errore di calcolo manuale in quanto eventuali errori vengono compensati nelle iterazioni successive

Vengono costruite a partire da un valore prefissato x_0 una successione di tangenti alla curva y come nello schema di figura



Sotto opportune condizioni la successione dei valori x_i risulta convergente abbastanza rapidamente ad una soluzione approssimata della ***x***.

I successivi valori di iterazione x_{n+1} si ottengono dal precedente x_n mediante la formula

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad (1)$$

La formula è ottenuta mediante i seguenti passaggi:

1. Si calcola il valore della derivata della funzione y(x) nel suo punto di ascissa x_n: tale valore come è noto rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel suo punto di ascissa x_n:

2. Si scrive l'equazione della retta tangente nel punto $[x_n ;f(x_n)]$:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

3. Si calcola l'ascissa x_{n+1} del punto di intersezione di questa retta con l'asse delle x ottenendo la (1)

Nelle iterazione è possibile vedere nella successione dei valori di x_i su quale cifra decimale calcolare la precisione del valore trovato spingendo le iterazioni fino a quando si sono stabilizzate le cifre decimali desiderate.

La scelta del valore iniziale x_0 è molto delicata ed importante in quanto come già detto non tutte le soluzioni reali dell'equazione sono valide per il problema che si sta risolvendo.

E' l'esame preliminare del problema che permette di individuare l'intervallo in cui si attende una soluzione.

Ad esempio in un tipico problema di Ricerca Operativa ossia la ricerca del tasso di rendimento interno di un investimento si possono generalmente ottenere equazioni polinomiali di grado superiore a due: in questo caso essendo la variabile il tasso di interesse ***i*** deve risultare positiva e inferiore al 50% (dovendo avere una rispondenza con la realtà). Pertanto per valore iniziale x_0 (*valore di innesco* della procedura) si adotterà ***i***=10%=0,10.

Nel caso di più soluzioni valide una diversa scelta del valore iniziale porta la successione delle x_i a convergere su una soluzione piuttosto che un'altra. Variando il valore iniziale è possibile ottenere le altre soluzioni.

APPLICAZIONE PRATICA

Per il calcolo occorre costruire una tabella come la seguente

	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
x_0=			
x_1=			
x_2=			
………			
x_n=			

Poiché il metodo compensa eventuali imprecisioni di calcolo (ovviamente non grossolane) per il calcolo puramente manuale nelle prime iterazioni **non occorre calcolare un numero eccessivo di cifre decimali** affinando queste nelle iterazioni successive.

Ad esempio si voglia calcolare l'unica soluzione dell'equazione:

$$y = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

Si calcola la derivata prima della funzione

$$y' = 3x^2 + 4x + 1$$

Con valore iniziale x_0=2

	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
x_0=2	17	21	-0,80
x_1=1,20	4,80	10,12	-0,47
x_2=0,73	1,18	5,51	-0,21
x_3=0,52	0,20	3,89	-0,05
x_4=0,47	0,015	3,542	-0,004
x_5=0,466	0,0015	2,9466	-0,000509
x_6=0,4654	0,0001	…….	…….

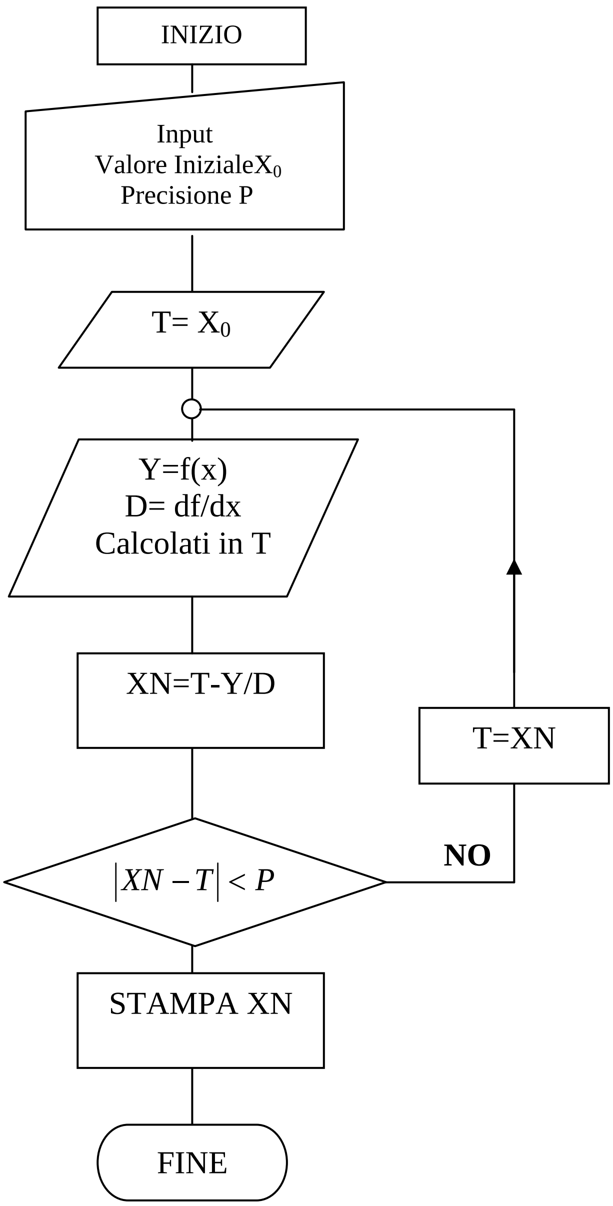
Con la sesta iterazione è già stata così individuata la soluzione con la seconda cifra decimale stabilizzata.
Le iterazioni vengono spinte fino alla cifra decimale desiderata in relazione al problema che si sta risolvendo.
Nelle prime interazioni bastano solo due cifre decimali, procedendo con le iterazioni si possono aggiungere le cifre decimali successive man mano che si stabilizzano le prime cifre decimali cioè

non varino tra una iterazione e la successiva.

Notare che i valori della prima colonna $f(x_i)$ convergono a zero infatti stiamo risolvendo l'equazione f(x)=0

Anche questo metodo si presta all'utilizzazione su pc con idoneo linguaggio di programmazione. Il diagramma di flusso è il seguente.

DIAGRAMMA DI FLUSSO METODO DELLE TANGENTI



Dove T è una variabile di scambio che contiene il precedente valore di Xn.

Tuttavia questo metodo si presta bene per la risoluzione con un **FOGLIO ELETTRONICO.**
Nel seguente schema di foglio elettronico nella cella **A2** viene posto il valore iniziale X_0. All'occorrenza questo valore può essere facilmente variato nel caso la succesione non converga oppure (dopo aver trovato una prima soluzione) per trovarne altre.

La funzione deve essere scritta come formula nella cella **B2** e la sua derivata nella cella **C2**. Le formule richiamano il contenuto della cella A2 che è la x. Nella cella D2 viene calcolato il rapporto

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

come divisione tra il contenuto della cella B2 e della C2.

Nella cella **A3** viene calcolata la x di successiva iterazione.

Le altre celle vengono riempite con le funzioni ***copia*** e ***incolla*** del foglio elettronico.
Qualora la funzione sia cambiata occorre cambiare il contenuto delle celle B2 e C2 e fare la loro copia nel resto delle celle delle colonne B e C.

La funzione riportata è la stessa calcolata manualmente in precedenza.

Microsoft Excel - Metodo di Newton Fourier

	A	B	C	D
1				
2		METODO DELLE TANGENTI		
3	x	f(x)	f'(x)	-f(x)/f'(x)
4	Valore iniziale	=A4^3+2*A4^2+A4-1	=3*A4^2+4*A4+1	=-B4/C4
5	=A4+D4	=A5^3+2*A5^2+A5-1	=3*A5^2+4*A5+1	=-B5/C5
6	=A5+D5	=A6^3+2*A6^2+A6-1	=3*A6^2+4*A6+1	=-B6/C6
7	=A6+D6	=A7^3+2*A7^2+A7-1	=3*A7^2+4*A7+1	=-B7/C7
8	=A7+D7	=A8^3+2*A8^2+A8-1	=3*A8^2+4*A8+1	=-B8/C8
9	=A8+D8	=A9^3+2*A9^2+A9-1	=3*A9^2+4*A9+1	=-B9/C9
10	=A9+D9	=A10^3+2*A10^2+A10-1	=3*A10^2+4*A10+1	=-B10/C10
11	=A10+D10	=A11^3+2*A11^2+A11-1	=3*A11^2+4*A11+1	=-B11/C11
12	=A11+D11	=A12^3+2*A12^2+A12-1	=3*A12^2+4*A12+1	=-B12/C12
13	=A12+D12	=A13^3+2*A13^2+A13-1	=3*A13^2+4*A13+1	=-B13/C13
14	=A13+D13	=A14^3+2*A14^2+A14-1	=3*A14^2+4*A14+1	=-B14/C14
15	=A14+D14	=A15^3+2*A15^2+A15-1	=3*A15^2+4*A15+1	=-B15/C15
16	=A15+D15	=A16^3+2*A16^2+A16-1	=3*A16^2+4*A16+1	=-B16/C16
17	=A16+D16	=A17^3+2*A17^2+A17-1	=3*A17^2+4*A17+1	=-B17/C17
18				

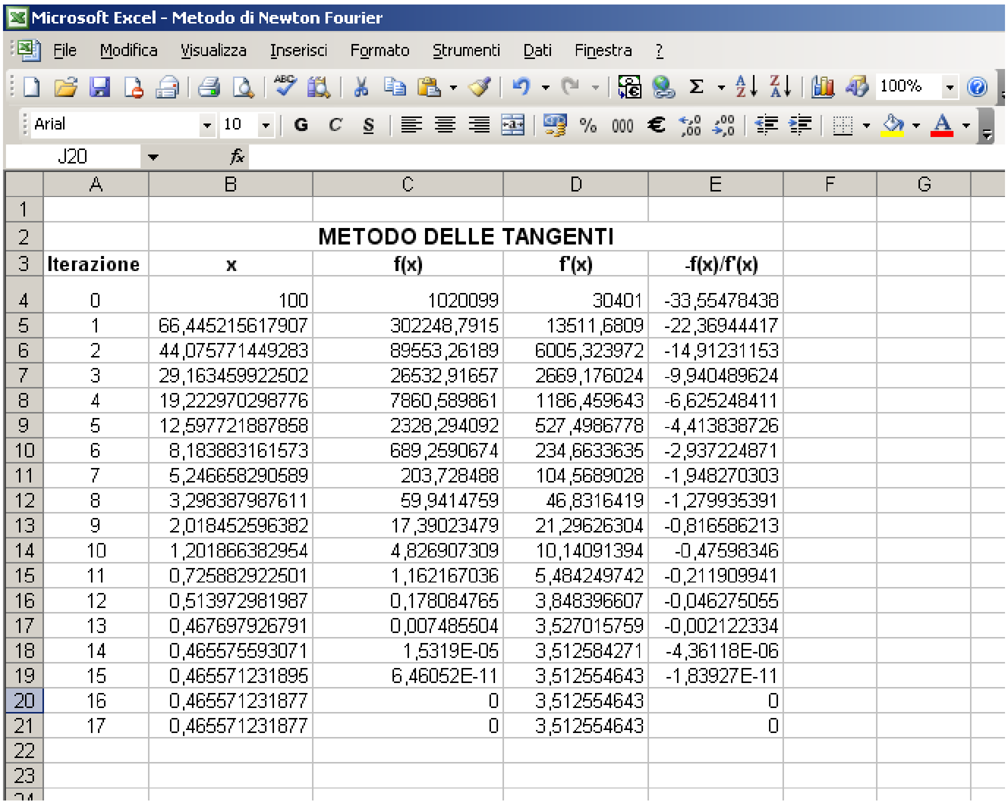
I valori calcolati sono i seguenti:

Microsoft Excel - Metodo di Newton Fourier

	A	B	C	D	E
1					
2			METODO DELLE TANGENTI		
3	Iterazione	x	f(x)	f'(x)	-f(x)/f'(x)
4	0	2	17	21	-0,80952381
5	1	1,190476190476	4,71212612	10,01360544	-0,470572378
6	2	0,719903812974	1,129525243	5,434399752	-0,207847287
7	3	0,512056526361	0,170722486	3,834831764	-0,044518898
8	4	0,467537627934	0,006920215	3,525924812	-0,001962667
9	5	0,465574961203	1,30995E-05	3,512579978	-3,72931E-06
10	6	0,465571231890	4,72409E-11	3,512554643	-1,34492E-11
11	7	0,465571231877	0	3,512554643	0
12	8	0,465571231877	0	3,512554643	0
13	9	0,465571231877	0	3,512554643	0
14	10	0,465571231877	0	3,512554643	0
15	11	0,465571231877	0	3,512554643	0
16	12	0,465571231877	0	3,512554643	0
17	13	0,465571231877	0	3,512554643	0
18	14	0,465571231877	0	3,512554643	0
19	15	0,465571231877	0	3,512554643	0
20	16	0,465571231877	0	3,512554643	0
21	17	0,465571231877	0	3,512554643	0
22					

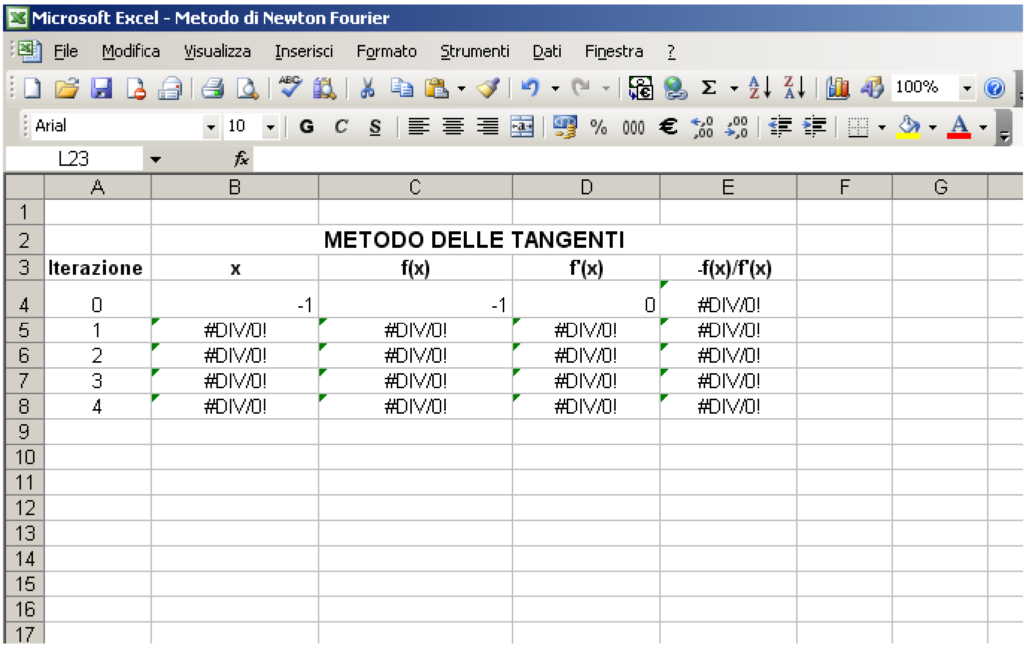
Alla 7^{ma} iterazione si stabilizza anche la decima cifra decimale e pertanto l'errore è inferiore ad $1*10^{-10}$.

Variando il valore iniziale il numero di iterazioni necessario per ottenere la stessa precisione aumenta ad esempio scegliendo 100 occorrono ben 16 iterazioni



Iterazione	x	f(x)	f'(x)	-f(x)/f'(x)
	METODO DELLE TANGENTI			
0	100	1020099	30401	-33,55478438
1	66,445215617907	302248,7915	13511,6809	-22,36944417
2	44,075771449283	89553,26189	6005,323972	-14,91231153
3	29,163459922502	26532,91657	2669,176024	-9,940489624
4	19,222970298776	7860,589861	1186,459643	-6,625248411
5	12,597721887858	2328,294092	527,4986778	-4,413838726
6	8,183883161573	689,2590674	234,6633635	-2,937224871
7	5,246658290589	203,728488	104,5689028	-1,948270303
8	3,298387987611	59,9414759	46,8316419	-1,279935391
9	2,018452596382	17,39023479	21,29626304	-0,816586213
10	1,201866382954	4,826907309	10,14091394	-0,47598346
11	0,725882922501	1,162167036	5,484249742	-0,211909941
12	0,513972981987	0,178084765	3,848396607	-0,046275055
13	0,467697926791	0,007485504	3,527015759	-0,002122334
14	0,465575593071	1,5319E-05	3,512584271	-4,36118E-06
15	0,465571231895	6,46052E-11	3,512554643	-1,83927E-11
16	0,465571231877	0	3,512554643	0
17	0,465571231877	0	3,512554643	0

Scegliendo erroneamente il valore iniziale pari a -1 si annulla la derivata e non si perviene a nessuna soluzione.



Iterazione	x	f(x)	f'(x)	-f(x)/f'(x)
	METODO DELLE TANGENTI			
0	-1	-1	0	#DIV/0!
1	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
2	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
3	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
4	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!